Részletesen kidolgozott feladatok a sorozatok témakörébl

Monotonitás, korlátosság

1. feladat

Mit mondhatunk a következ sorozatról monotonitás és korlátosság szempontjából?

$$a_n = \frac{2n+1}{n+3}$$

Monotonitás vizsgálata:
Mieltt a bizonyításhoz kezdünk, számítsuk ki a sorozat néhány els elemét!

$$a_1 = \frac{2\cdot 1+1}{1+3} = \frac{3}{4} = 0,75$$

$$a_2 = \frac{2\cdot 2+1}{2+3} = \frac{5}{5} = 1$$

$$a_3 = \frac{2\cdot 3+1}{3+3} = \frac{7}{6} = 1,1\dot{6}$$

Sejtés: a sorozat szigorúan monoton n
Számítsuk ki az $a_{n+1} - a_n$ különbséget, ha pozitív eredményt kapunk, akkor bebizonyítottuk a sejtést.
a_{n+1} felírása: az a_n képletébe n helyére (n+1)-et írunk, fontos, hogy mindig tegyük zárójelbe! (A zárójel néha elhagyható, de ha nem vagyunk benne biztosak, hogy mikor, azt javaslom, mindig írjunk zárójelet, mert akkor biztos nem követünk el hibát.)

$$a_{n+1} = \frac{2\cdot(n+1)+1}{(n+1)+3}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2\cdot(n+1)+1}{(n+1)+3} - \frac{2n+1}{n+3} = \frac{2n+2n+1}{n+1+3} - \frac{2n+1}{n+3} = \frac{2n+3}{n+4} - \frac{2n+1}{n+3}$$

A fenti sorban felbontottuk a zárójeleket és összevontunk.
Ezután közös nevezre hozzuk a két törtet, mivel a nevezknek nincs közös tényezje (a legnagyobb közös osztójuk 1) a közös nevez a két nevez szorzata lesz:

$$\frac{(2n+3)\cdot(n+3)}{(n+4)\cdot(n+3)} - \frac{(2n+1)\cdot(n+4)}{(n+3)\cdot(n+4)}$$

Látható, hogy a közös nevezre hozás mindkét törtnél lényegében törtbvítés volt. Az els tört számlálóját és nevezjét is megszoroztuk $n+3$ -mal, a második törtet $n+4$-gyel bvítettük.
Most közös a nevez, ezért a kifejezésünket egy törtként is felírhatjuk, majd a számlálóban felbontjuk a zárójeleket, ezután összevonunk. A nevezben soha ne végezzük el a szorzást!

$$\frac{(2n+3)\cdot(n+3)-(2n+1)\cdot(n+4)}{(n+4)\cdot(n+3)}=\frac{\left(2n^2+6n+3n+9\right)-\left(2n^2+8n+n+4\right)}{(n+4)\cdot(n+3)}$$
$$=\frac{\left(2n^2+9n+9\right)-\left(2n^2+9n+4\right)}{(n+4)\cdot(n+3)}$$

A nevez második tagjánál vigyázzunk, a zárójel eltt negatív eljel van, ez azt jelenti, hogy ha felbontjuk a zárójelet minden tag ellentétes eljel lesz.

$$\frac{\left(2n^2+9n+9\right)-2n^2-9n-4}{(n+4)\cdot(n+3)}=\frac{5}{(n+4)\cdot(n+3)}$$

A számláló összevonása után kapott tört eljelét már könnyen megvizsgálhatjuk.
A számláló 5, ez pozitív, a nevezben n+4 > 0 és n+3 > 0, mert n > 0, ezért a szorzatuk is, így a nevez is pozitív.
Ha egy tört számlálója és nevezje is pozitív, akkor a tört is az, tehát bebizonyítottuk az állítást, a sejtés igaz, a sorozat szigorúan monoton n.

Korlátosság vizsgálata:
Ha egy sorozat szigorúan monoton n, vagy monoton n, akkor els eleme mindig alkalmas alsó korlátnak, $k = a_1$
A fels korlát keresése eltt célszer kiszámítani a sorozat határértékét.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}}=\frac{2}{1}=2$$

A sorozat szigorúan monoton növekedve tart 2-höz. Ezért a 2 (de bármely 2-nél nagyobb szám is) alkalmas lesz fels korlátnak.
Nézzük meg, hogy valóban igaz-e, hogy minden sorozat elem (ehhez a sorozat általános elemével kell elvégezni a vizsgálatot) kisebb, mint 2.

$$a_n<2$$

$$\frac{2n+1}{n+3}<2$$

Vonjunk ki az egyenltlenség mindkét oldalából kettt, majd hozzuk a bal oldali kifejezést közös nevezre:

$$\frac{2n+1}{n+3}-2<0$$

$$\frac{2n+1}{n+3}-\frac{2(n+3)}{n+3}<0$$

$$\frac{2n+1-2(n+3)}{n+3}<0$$

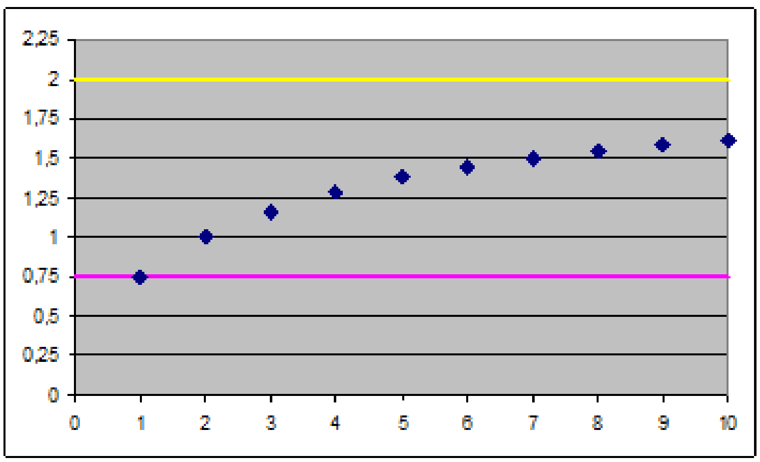
Vigyázat, negatív előjel a zárójel előtt!

$$\frac{2n+1-2n-6}{n+3} < 0$$

$$\frac{-5}{n+3} < 0$$

Igaz egyenltlenséget kaptunk, mert a bal oldali tört számlálója negatív (-5), nevezje pozitív, mert n > 0, így a tört is negatív.
Tehát a sorozat egy fels korlátjának K = 2 valóban megfelel.

Összefoglalva: sorozatunk szigorúan monoton n és korlátos, alsó korlátja k = a_1=3/4, fels korlátja K = 2, konvergens, határértéke is 2.
(Az alábbi ábra azt mutatja, hogy a sorozatok korlátaikkal együtt Excel programban is szemléltethetk.)



Most nézzük meg, hogy ugyanennek a feladatnak a megoldásában, hogyan segítenek a Maple utasítások?

> $restart$

> $with(plots):$

> $a(n) := \frac{2 \cdot n+1}{n+3}$

$$a := n \rightarrow \frac{2n+1}{n+3} \quad \textbf{(1.1.1)}$$

> $a(1)$

$$\frac{3}{4} \quad \textbf{(1.1.2)}$$

> $a(2)$

$$1 \quad \textbf{(1.1.3)}$$

> $a(3)$

$$\frac{7}{6} \quad (1.1.4)$$

> $a(n+1)$

$$\frac{2n+3}{n+4} \quad (1.1.5)$$

> $a(n+1) - a(n)$

$$\frac{2n+3}{n+4} - \frac{2n+1}{n+3} \quad (1.1.6)$$

> $simplify(a(n+1)-a(n))$

$$\frac{5}{(n+4)(n+3)} \quad (1.1.7)$$

> $solve(\{ a(n+1) - a(n) > 0, n > 0 \}, [n]);$

$$[[0 < n]] \quad (1.1.8)$$

> $k := a(1)$

$$k := \frac{3}{4} \quad (1.1.9)$$

> $limit(a(n), n = infinity)$

$$2 \quad (1.1.10)$$

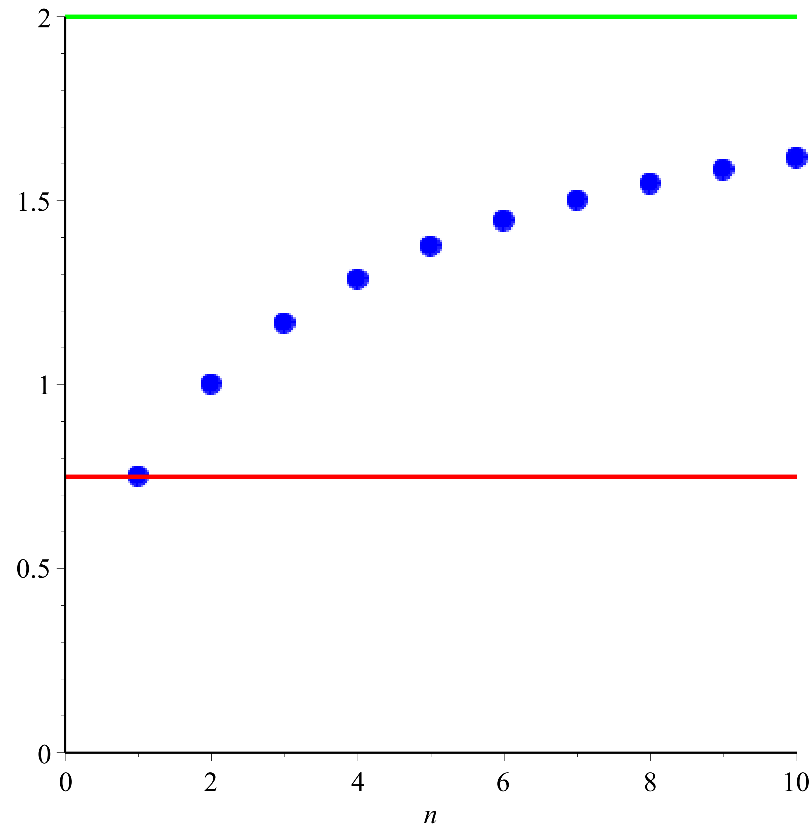
> $K := limit(a(n), n = infinity)$

$$K := 2 \quad (1.1.11)$$

> $l := [[n, a(n)]\$n = 1..10];$

$$l := \left[\left[1, \frac{3}{4}\right], [2, 1], \left[3, \frac{7}{6}\right], \left[4, \frac{9}{7}\right], \left[5, \frac{11}{8}\right], \left[6, \frac{13}{9}\right], \left[7, \frac{3}{2}\right], \left[8, \frac{17}{11}\right], \left[9, \frac{19}{12}\right], \left[10, \frac{21}{13}\right]\right] \quad (1.1.12)$$

> $plot([l, k, K], n = 0..10, style = [point, line, line], color = [blue, red, green], symbol = solidcircle, symbolsize = 20, thickness = [4, 2, 2], view = [0..10, 0..2]);$



2. feladat

Mit mondhatunk a következ sorozatról monotonitás és korlátosság szempontjából?

$$a_n = \frac{4\,n - 6}{1 - 2\,n}$$

Monotonitás vizsgálata:

$$a_1 = \frac{4\cdot 1 - 6}{1 - 2\cdot 1} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$a_2 = \frac{4\cdot 2 - 6}{1 - 2\cdot 2} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3} \approx -0,67$$

$$a_3 = \frac{4\cdot 3 - 6}{1 - 2\cdot 3} = \frac{6}{-5} = -\frac{6}{5} = -1,2$$

Sejtés:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{4\cdot(n+1)-6}{1-2(n+1)} - \frac{4n-6}{1-2n} = \frac{4n+4-6}{1-2n-2} - \frac{4n-6}{1-2n} = \frac{4n-2}{-1-2n} - \frac{4n-6}{1-2n}$$
$$= \frac{(4n-2)\cdot(1-2n)-(4n-6)\cdot(-1-2n)}{(-1-2n)\cdot(1-2n)} =$$

$$\frac{\left(4n-8n^2-2+4n\right)-\left(-4n-8n^2+6+12n\right)}{(-1-2n)\cdot(1-2n)} = \frac{\left(8n-8n^2-2\right)-\left(8n-8n^2+6\right)}{(-1-2n)\cdot(1-2n)}$$
$$= \frac{8n-8n^2-2-8n+8n^2-6)}{(-1-2n)\cdot(1-2n)} = \frac{-8}{(-1-2n)\cdot(1-2n)}$$

Milyen eljel a kapott tört? Számlálója negatív (-8), de vajon a nevez eljele mi lesz? Mindkét szorzótényez negatív a nevezben, mert n > 0, azért szorzatuk pozitív. A tört negatív lesz, mert a számlálója és a nevezje különböz eljel.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{-8}{(-1-2n)\cdot(1-2n)} < 0\,,$$

ezért a sorozat szigorúan monoton csökken.

Korlátosság vizsgálata:
Minden szigorúan monoton csökken és monoton csökken sorozat els eleme alkalmas lesz fels korlátnak,

$K = a_1 = 6$

Az alsó korlát kiszámítása eltt nézzük meg a határértéket:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n-6}{1-2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4-\frac{6}{n}}{\frac{1}{n}-2} = \frac{4}{-2} = -2$$

Alsó korlátnak megfelel lesz a -2, vagy bármely nála kisebb szám. Az alsó korlátnál minden sorozatelemnek nagyobbnak kell lennie, ezért a következ egyenltlenségnek kell teljesülnie:

$a_n > -2$

$$\frac{4n-6}{1-2n} > -2$$

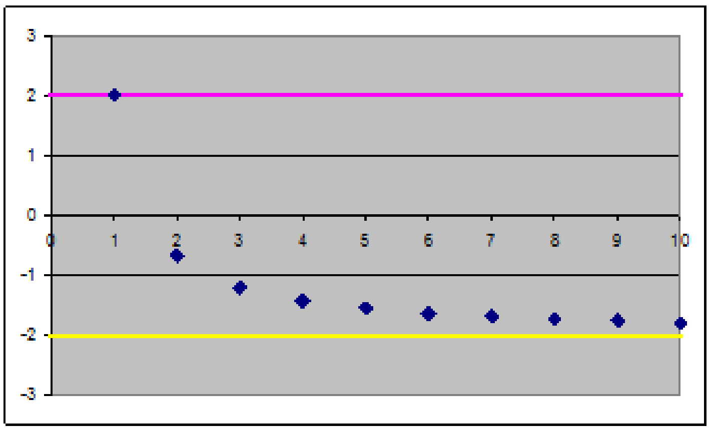
$$\frac{4n-6}{1-2n} + 2 > 0$$

$$\frac{4n-6}{1-2n} + \frac{2\cdot(1-2n)}{1-2n} > 0$$

$$\frac{4n-6+2-4n}{1-2n} > 0$$

$$\frac{-4}{1-2n} > 0$$

Az egyenltlenség igaz, mert a számláló és a nevez is negatív, ezért a tört pozitív.
A sorozat szigorúan monoton csökken, fels korlátja 2, alsó korlátja -2, tehát korlátos a sorozat, és így konvergens is, határértéke -2.



Maple-ben ugyanez:

> $a(n) := \frac{4 \cdot n - 6}{1 - 2 \cdot n}$

$$a := n \to \frac{4n-6}{1-2n} \quad \textbf{(1.1.13)}$$

> $a(1)$

$$2 \quad \textbf{(1.1.14)}$$

> $a(2)$

$$-\frac{2}{3} \quad \textbf{(1.1.15)}$$

> $a(3)$

$$-\frac{6}{5} \quad \textbf{(1.1.16)}$$

> $a(n+1)$

$$\frac{4n-2}{-1-2n} \quad \textbf{(1.1.17)}$$

> $a(n+1) - a(n)$

$$\frac{4n-2}{-1-2n} - \frac{4n-6}{1-2n} \quad \textbf{(1.1.18)}$$

> $simplify(a(n+1) - a(n))$

(1.1.19)

$$-\frac{8}{4n^2-1} \tag{1.1.19}$$

> solve({ a(n + 1) − a(n) > 0, n > 0 }, [n]);

$$\left[\left[n < \frac{1}{2}, 0 < n\right]\right] \tag{1.1.20}$$

> K := a(1)

$$K := 2 \tag{1.1.21}$$

> limit(a(n), n = infinity)

$$-2 \tag{1.1.22}$$

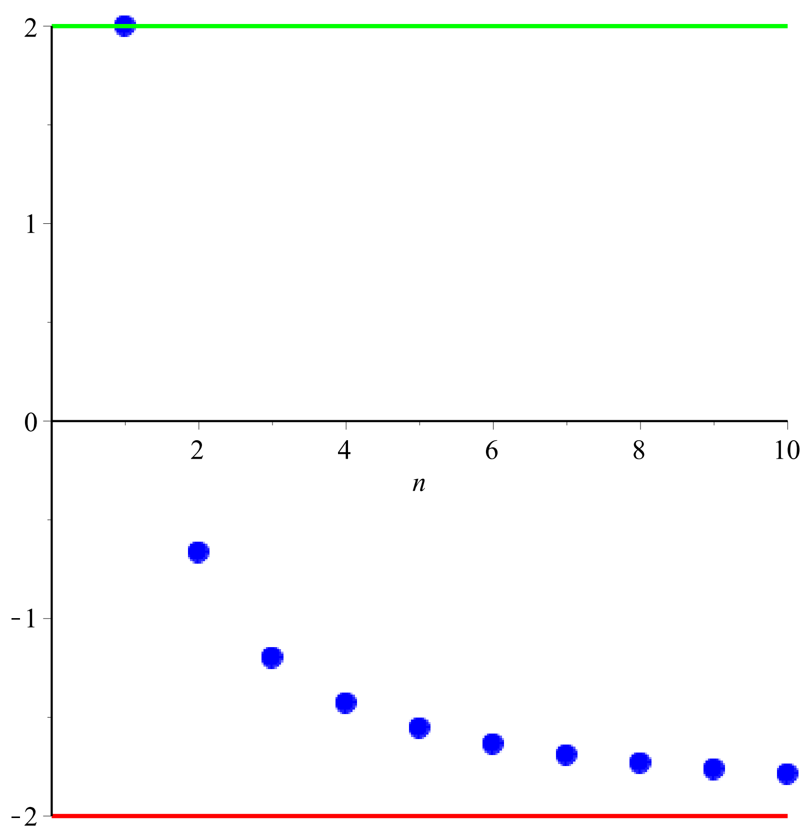
> k := limit(a(n), n = infinity)

$$k := -2 \tag{1.1.23}$$

> l := [[n, a(n)] $n = 1 ..10];

$$l := \left[[1, 2], \left[2, -\frac{2}{3}\right], \left[3, -\frac{6}{5}\right], \left[4, -\frac{10}{7}\right], \left[5, -\frac{14}{9}\right], \left[6, -\frac{18}{11}\right], \left[7, -\frac{22}{13}\right], \left[8, -\frac{26}{15}\right], \left[9, -\frac{30}{17}\right], \left[10, -\frac{34}{19}\right]\right] \tag{1.1.24}$$

> plot([l, k, K], n = 0 ..10, style = [point, line, line], color = [blue, red, green], symbol = solidcircle, symbolsize = 20, thickness = [4, 2, 2], view = [0 ..10, −2 ..2]);



3. feladat

Mit mondhatunk a következ sorozatról monotonitás és korlátosság szempontjából?

$$a_n = \frac{n+1}{n-5} \qquad n \neq 5$$

Kikötést kell tennünk, mert a nevez nem lehet 0.
Miért nem tettünk kikötést az elz feladatokban, hiszen ott is tört tagú sorozataink voltak?
Ha tettünk volna kikötést ez az első feladatban $n \neq -3$, a másodikban $n \neq 0{,}5$ lett volna, de ezek az n értékek a sorozatoknál sohasem fordulnak el, mert az n csak pozitív, egész szám lehet.

Monotonitás vizsgálata:

$$a_1 = \frac{1+1}{1-5} = \frac{2}{-4} = -0,5$$

$$a_2 = \frac{2+1}{2-5} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$a_3 = \frac{3+1}{3-5} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$a_4 = \frac{4+1}{4-5} = \frac{5}{-1} = -5$$

a_5 nincs értelmezve

$$a_6 = \frac{6+1}{6-5} = 7$$

$$a_7 = \frac{7+1}{7-5} = \frac{8}{2} = 4$$

Mit mondhatunk ennek a sorozatnak a monotonitásáról, elször csökken, majd felugrik egy nagyot, és újra csökkenni kezd. Ha valaki csak az els három tagot számolja ki az a sejtése támadhat, hogy ez a sorozat szigorúan monoton csökken. Nézzük meg, hogy a szokásos számolásból kiderül-e a sorozat „renitens viselkedése", s ha igen hogyan tudjuk észrevenni.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)+1}{(n+1)-5} - \frac{n+1}{n-5} = \frac{n+2}{n-4} - \frac{n+1}{n-5} = \frac{(n+2)\cdot(n-5) - (n+1)\cdot(n-4)}{(n-4)\cdot(n-5)}$$

$$= \frac{\left(n^2 - 5n + 2n - 10\right) - \left(n^2 - 4n + n - 4\right)}{(n-4)\cdot(n-5)} =$$

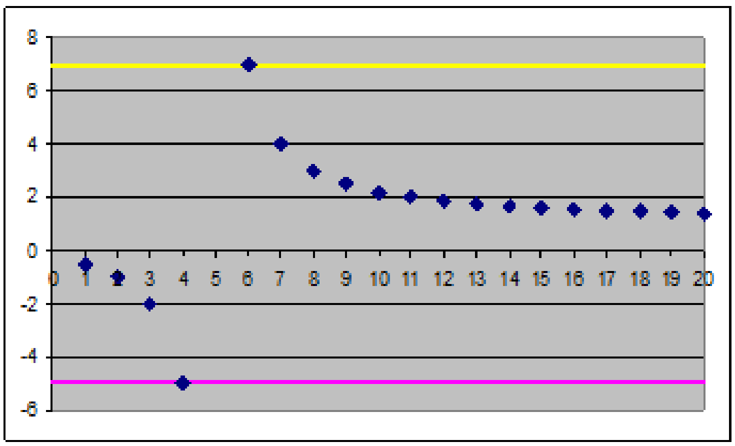
$$= \frac{\left(n^2 - 3n - 10\right) - \left(n^2 - 3n - 4\right)}{(n-4)\cdot(n-5)} = \frac{n^2 - 3n - 10 - n^2 + 3n + 4}{(n-4)\cdot(n-5)} = \frac{-6}{(n-4)\cdot(n-5)}$$

Vizsgáljuk meg a kapott tört eljelét, a számláló mindig negatív, tehát a tört eljelét a nevez fogja meghatározni.
Ha $n < 4$ mindkét tényez negatív, a nevez pozitív, a tört negatív, tehát 4-nél kisebb n-ekre a

sorozat szigorúan monoton csökken. Ha n > 5, akkor mindkét tényez pozitív, szorzatuk pozitív, a tört negatív, ekkor is szigorúan monoton csökken a sorozat. A fenti törtbl a sorozat 4 és 5 közötti viselkedésére nem kapunk választ, ki kell számítanunk a megfelel sorozatelemeket (amelyiket lehet).

Mondhatjuk azt, hogy a sorozat szigorúan monoton csökken, ha n > 5, általában is elmondhatjuk, hogy a sorozat viselkedése „nagy" n-ekre érdekel bennünket, a sorozat elején néhány „nem jól viselkedő taggal" nem kell törődnünk.

Korlátosság vizsgálata:
Hasonlóan az elzekhez gyakorlásként meg lehet határozni a határértéket, a fels korlát K = 7, az alsó korlát k = -5 lesz.
Összefoglalva a sorozat szigorúan monoton csökken, ha n > 5, fels korlátja K = 7, az alsó korlátja k = -5, tehát korlátos, ezért konvergens is, határértéke 1.



A feladat megoldása Maple utasítások segítségével:

> $a(n) := \dfrac{n+1}{n-5}$

$$a := n \rightarrow \frac{n+1}{n-5} \quad \textbf{(1.1.25)}$$

> $a(1)$

$$-\frac{1}{2} \quad \textbf{(1.1.26)}$$

> $a(2)$

$$-1 \quad \textbf{(1.1.27)}$$

> $a(3)$

$$-2 \quad \textbf{(1.1.28)}$$

> $a(4)$

$$-5 \quad \textbf{(1.1.29)}$$

> $a(6)$

$$7 \quad \textbf{(1.1.30)}$$

> $a(7)$

$$4 \qquad \textbf{(1.1.31)}$$

> $a(n+1)$

$$\frac{n+2}{n-4} \qquad \textbf{(1.1.32)}$$

> $a(n+1) - a(n)$

$$\frac{n+2}{n-4} - \frac{n+1}{n-5} \qquad \textbf{(1.1.33)}$$

> $simplify(a(n+1) - a(n))$

$$-\frac{6}{(n-4)\,(n-5)} \qquad \textbf{(1.1.34)}$$

> $solve(\{\ \mathrm{a(n+1) - a(n)} > 0, \mathrm{n} > 0\ \}, [n]);$

$$[[n < 5, 4 < n]] \qquad \textbf{(1.1.35)}$$

> $k := a(4)$

$$k := -5 \qquad \textbf{(1.1.36)}$$

> $K := a(6)$

$$K := 7 \qquad \textbf{(1.1.37)}$$

> $limit(a(n), n = infinity)$

$$1 \qquad \textbf{(1.1.38)}$$

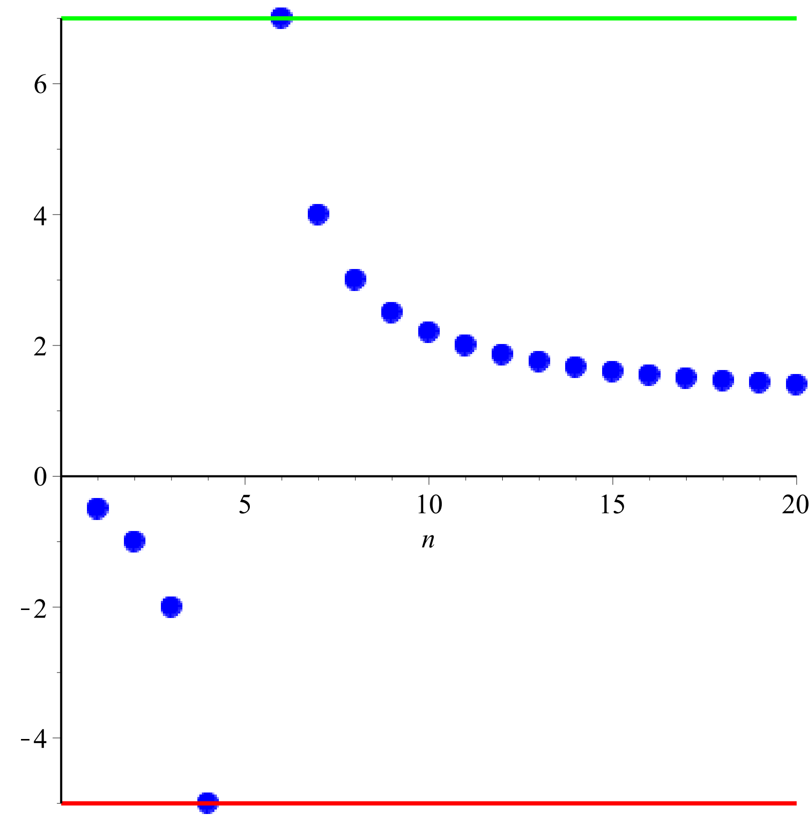
> $l1 := [[\mathrm{n}, \mathrm{a}(n)]\ \$n = 1..4];$

$$l1 := \left[\left[1, -\frac{1}{2}\right], [2, -1], [3, -2], [4, -5]\right] \qquad \textbf{(1.1.39)}$$

> $l2 := [[\mathrm{n}, \mathrm{a}(n)]\ \$n = 6..20];$

$$l2 := \left[[6, 7], [7, 4], [8, 3], \left[9, \frac{5}{2}\right], \left[10, \frac{11}{5}\right], [11, 2], \left[12, \frac{13}{7}\right], \left[13, \frac{7}{4}\right], \left[14, \frac{5}{3}\right], \left[15, \frac{8}{5}\right], \left[16, \frac{17}{11}\right], \left[17, \frac{3}{2}\right], \left[18, \frac{19}{13}\right], \left[19, \frac{10}{7}\right], \left[20, \frac{7}{5}\right]\right] \qquad \textbf{(1.1.40)}$$

> $plot([l1, l2, k, K], n = 0..20, style = [point, point, line, line], color = [blue, blue, red, green], symbol = solidcircle, symbolsize = 20, thickness = [4, 4, 2, 2], view = [0..20, -5..7]);$



4. feladat

Mit mondhatunk a következ sorozatról monotonitás és korlátosság szempontjából?

$a_n = -2\,n + 5$

Monotonitás vizsgálata:

$a_1 = -2 \cdot 1 + 5 = 3$
$a_2 = -2 \cdot 2 + 5 = 1$
$a_3 = -2 \cdot 3 + 5 = -1$

Sejtés: a sorozat szigorúan monoton csökken.
Bizonyítás:

$$a_{n+1} - a_n = (-2(n+1) + 5) - (-2\,n + 5) = -2\,n - 2 + 5 + 2\,n - 5 = -2 < 0$$

Tehát a sorozat valóban szigorúan monoton csökken.

Korlátosság vizsgálata:
Mivel a sorozat szigorúan monoton csökken a sorozat els eleme alkalmas lesz fels korlátnak,

$K = a_1 = 3$

A sorozat alulról nem korlátos.
Bizonyítás indirekt:
Tegyük fel, hogy van egy m szám, ami alkalmas alsó korlátnak, vagyis a sorozatnak nincs m-nél kisebb eleme. Ezt képletben a következképpen írhatjuk fel:
$a_n \geq m$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$-2\,n + 5 \geq m$$

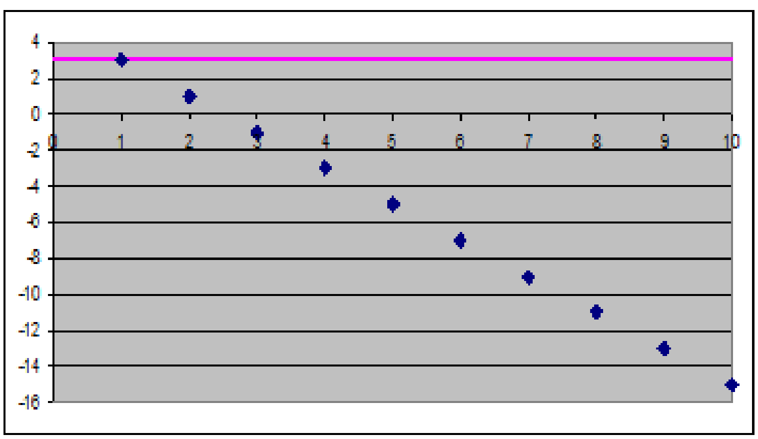
$$-2\,n \geq m - 5$$

Vigyázat! Negatív számmal való osztás, az egyenlőtlenség iránya megfordul!

$$n \leq -\frac{m}{2} + \frac{5}{2}$$

A kapott végeredmény nyilvánvaló lehetetlenség, hiszen n bármilyen nagy pozitív természetes szám lehet. Az ellentmondást csak úgy oldhatjuk fel, hogy eredeti állításunk hamis volt, vagyis a sorozatnak nincs alsó korlátja.

Összefoglalva a sorozat szigorúan monoton csökken, felülrl korlátos, fels korlátja $K = a_1 = 3$, alulról nem korlátos.



Maple-ben:

> $a(n) := -2\cdot n + 5$

$$a := n \rightarrow -2\,n + 5 \qquad \textbf{(1.1.41)}$$

> $a(1)$

$$3 \qquad \textbf{(1.1.42)}$$

> $a(2)$

$$1 \tag{1.1.43}$$

> $a(3)$

$$-1 \tag{1.1.44}$$

> $a(n+1) - a(n)$

$$-2 \tag{1.1.45}$$

> $limit(a(n), n = infinity)$

$$-\infty \tag{1.1.46}$$

> $solve(\{\ \mathrm{a(n)} - \mathrm{m} \geq 0\}, [n]);$

$$\left[\left[n \leq \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\, m\right]\right] \tag{1.1.47}$$

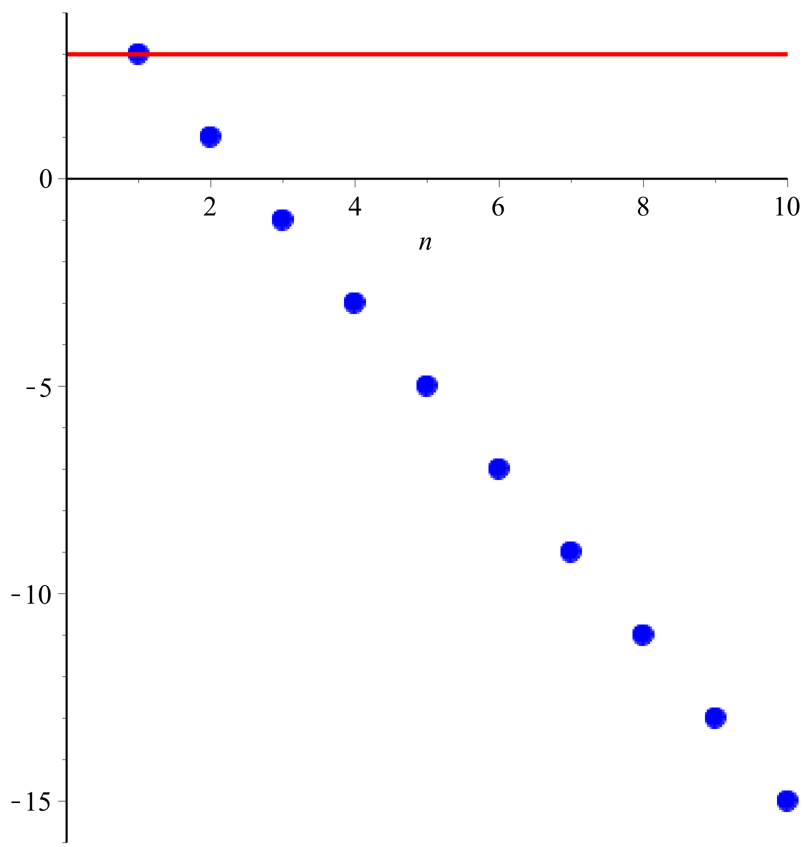
> $K := a(1)$

$$K := 3 \tag{1.1.48}$$

> $l := [[\mathrm{n}, \mathrm{a}(n)]\ \$n = 1\,..10];$

$$l := [[1, 3], [2, 1], [3, -1], [4, -3], [5, -5], [6, -7], [7, -9], [8, -11], [9, -13], [10, -15]] \tag{1.1.49}$$

> $plot([l, K], n = 0\,..10, style = [point, line], color = [blue, red], symbol = solidcircle, symbolsize = 20, thickness = [4, 2], view = [0\,..10, -16\,..4])$



Két (egyváltozós) polinom hányadosának határértéke

Az $a_n = 1/n$ sorozat határértékére visszavezethet feladatok

- A polinomok határértéke mindig $\pm\infty$, ha $n \to \infty$, tehát ha két polinom hányadosának határértékét szeretnénk kiszámítani, az mindig egy $\pm\infty / \pm\infty$ típusú kritikus határérték. Ezért ki kell találni valami olyan módszert, amivel azonos átalakítások segítségével addig formáljuk a kifejezéseket, amíg a határérték már nem lesz kritikus.

- Mi a polinom? Egy változó, jelen esetben „n" hatványai számokkal szorozva és összeadva, csökken hatványok szerint rendezve. Pl.:

$$4 n^3 + 5 n^2 - 2 n + 11,$$

ez n változó harmadfokú egyváltozós polinomja.

- A definíció szerint összeadásnak kell szerepelni a hatványok között, a fenti példában azonban van egy kivonás is. Okoz-e ez problémát? Nem, mert a polinom

$$4 n^3 + 5 n^2 + (-2) \cdot n + 11$$

formába is írható.

- Az „n" hatványok előtti szám-szorzókat együtthatóknak szoktuk nevezni.

- A legnagyobb kitevj hatvány eltti együttható a fegyüttható.

Műveletek és konvergens sorozatok

Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, akkor

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot a$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$, ahol $b \neq 0$ és $b_n \neq 0$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} {a_n}^c = a^c$, ahol c konstans és $a \rangle 0$

5/a. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$, ahol $a \rangle 0$

1. feladat

Számítsuk ki a következ határértéket:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\,n-1}{3+5\,n}$$

Láthatjuk, hogy a számlálóban és a nevezben is elsfokú polinom van ($n = n^1$). A számlálót és a nevezőt is elosztjuk tagonként „n”-nel. Megtehetjük-e ezt anélkül, hogy megváltozna a tört értéke? Ez azonos átalakítás, nevezetesen tört egyszersítés, hasonlóan

$$\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

átalakításhoz, (ahol a törtet 3-mal egyszersítettük) tehát a tört értéke nem változik.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3+5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{3}{n}+\frac{5n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{\frac{3}{n}+5}$$

Tudjuk, hogy $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, vagy másképp $\frac{1}{n}\to 0$, ha $n\to\infty$.

Ezután a szürke keretben lev mveleti azonosságokat alkalmazzuk:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}=\lim_{n\to\infty}3\cdot\frac{1}{n}=3\cdot 0=0$$

A 2. azonosságot használtuk fel:

$c=3,\quad a_n=\frac{1}{n},\ a=0$

$$\boxed{2.\ \lim_{n\to\infty} c\cdot a_n = c\cdot a}$$

A számláló határértékére az 1. azonosság alkalmazható (kivonás), a számláló határértéke:

$$\boxed{1.\ \lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n)=a\pm b}$$

$a_n=2$ (konstans 2 sorozat: 2, 2, 2, …), $b_n=\frac{1}{n}$

a = 2, b = 0, 2 – 0 = 2

A nevez határértékére szintén az 1. azonosság alkalmazható (összeadás), a nevez határértéke:

$a_n=\frac{3}{n}$, $b_n=5$

a = 0, b = 5, 0 + 5 = 5

$$\boxed{1.\ \lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n)=a\pm b}$$

A tört határértékéhez már csak a 4. azonosságot kell felhasználni, és adódik, hogy ha a számláló határértéke 2, a nevezé pedig 5, akkor a tört határértéke $\frac{2}{5}$ lesz.

- $$\boxed{4.\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}}$$

Tehát:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\,n-1}{3+5\,n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{3\cdot\frac{1}{n}+5}=\frac{2-0}{3\cdot 0+5}=\frac{2}{5}$$

Maple-ben a limit utasítás azonnal megadja a sorozat határértékét.

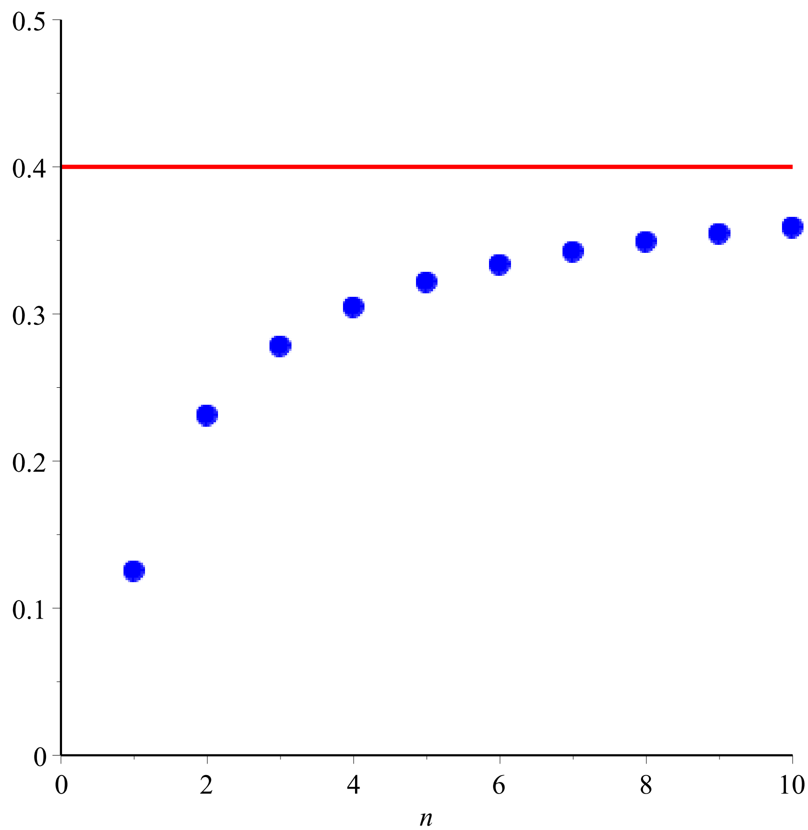
> $h := limit\left(\frac{2\cdot n-1}{3+5\cdot n}, n=infinity\right)$

$$h := \frac{2}{5} \tag{1.2.1}$$

> $l := \left[\left[\mathrm{n}, \frac{2\cdot n-1}{3+5\cdot n}\right] \$ n=1 ..10\right];$

$$l := \left[\left[1, \frac{1}{8}\right], \left[2, \frac{3}{13}\right], \left[3, \frac{5}{18}\right], \left[4, \frac{7}{23}\right], \left[5, \frac{9}{28}\right], \left[6, \frac{1}{3}\right], \left[7, \frac{13}{38}\right], \left[8, \frac{15}{43}\right], \left[9, \frac{17}{48}\right], \left[10, \frac{19}{53}\right]\right] \tag{1.2.2}$$

> $plot([l, h], n=0..10, style=[point, line], color=[blue, red], symbol=solidcircle, symbolsize=20, thickness=[4, 2], view=[0..10, 0..0.5])$



2. feladat

Számítsuk ki a következ határértéket:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+5}{n^2+4n+2}$$

A számláló és a nevez fokszáma megegyezik, mindkett másodfokú polinom. A legnagyobb kitevj hatvány az n^2, ezzel osztjuk el a számlálót és a nevezt is.
A következ adódik:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^2}{n^2}-\frac{3n}{n^2}+\frac{5}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}+\frac{4n}{n^2}+\frac{2}{n^2}}$$

Az egyszersítések után:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}{1+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}=\lim_{n\to\infty}5\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}=5\cdot 0\cdot 0=0$$

a szürke táblázat 2. és 3. azonosságát alkalmaztuk.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} c\cdot a_n = c\cdot a$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\cdot b_n = a\cdot b$

Általánosan is elmondhatjuk, hogy a $\frac{c}{n^k}$ (a számlálóban c egy állandó szám, a nevezben n pozitív, egész kitevj hatványa az n^k) típusú határérték mindig 0.
Az elz feladatban megnéztük, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}=0$$

és ugyanígy igazolható az is, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}=0$$

Ezután az 1. és 4. azonosság alkalmazásával adódik, hogy a határérték

$$1.\ \lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$$

$$4.\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}{1+\frac{4}{n}+\frac{2}{n^2}} = \frac{2}{1} = 2$$

A szemléltetést a Maple segítségével végezzük el. Az ábrára pillantva, észrevehetjük, hogy a sorozat csak a 2. elemtl kezdden szigorúan monoton növekv és azt is, hogy ennek a sorozatnak a konvergenciája sokkal „lassúbb" az előzőnél. Ott már a 10. elem 0,05-nél kevesebbel tér el a határértéktl, itt még a 20. elem eltérése is csaknem 10-szer annyi (0,5).

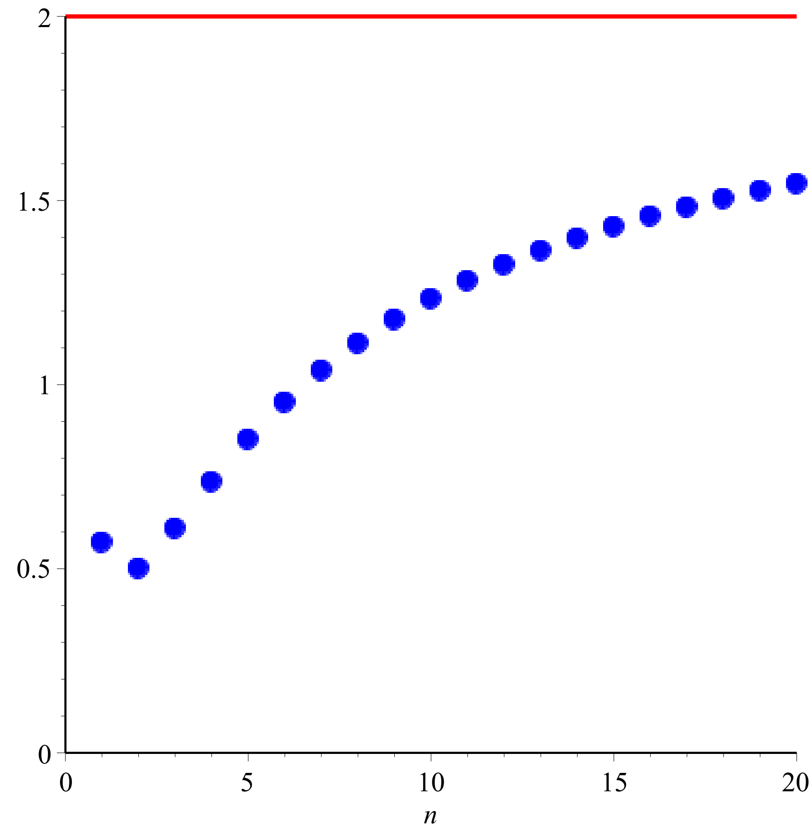
> $h := limit\left(\frac{2\cdot n^2-3\cdot n+5}{n^2+4\cdot n+2}, n = infinity\right)$

$$h := 2 \qquad \textbf{(1.2.3)}$$

> $l := \left[\left[\mathrm{n}, \frac{2\cdot n^2-3\cdot n+5}{n^2+4\cdot n+2}\right] \$ n = 1..20\right];$

$$l := \left[\left[1, \frac{4}{7}\right], \left[2, \frac{1}{2}\right], \left[3, \frac{14}{23}\right], \left[4, \frac{25}{34}\right], \left[5, \frac{40}{47}\right], \left[6, \frac{59}{62}\right], \left[7, \frac{82}{79}\right], \left[8, \frac{109}{98}\right], \left[9, \frac{20}{17}\right], \left[10, \frac{175}{142}\right], \left[11, \frac{214}{167}\right], \left[12, \frac{257}{194}\right], \left[13, \frac{304}{223}\right], \left[14, \frac{355}{254}\right], \left[15, \frac{10}{7}\right], \left[16, \frac{67}{46}\right], \left[17, \frac{532}{359}\right], \left[18, \frac{599}{398}\right], \left[19, \frac{670}{439}\right], \left[20, \frac{745}{482}\right]\right] \qquad \textbf{(1.2.4)}$$

> $plot([l, h], n = 0..20, style = [point, line], color = [blue, red], symbol = solidcircle, symbolsize = 20, thickness = [4, 2], view = [0..20, 0..2])$



3. feladat

A következben egy olyan tört határértékét számítsuk ki, ahol a számláló fokszáma nagyobb a nevez fokszámánál:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n-3}{3n^2+n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n^2}-\frac{3}{n^3}}{\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}=+\infty$$

Magyarázat: A legnagyobb hatvány n^3, tehát ezzel osztjuk el a számlálót és a nevezt is. Felhasználva az ismert azonosságokat azt kapjuk, hogy a számláló 1-hez, a nevez 0-hoz tart. A „nem kritikus határértékek" között felsoroltuk a szám/0 típusú határértéket, ami végtelen. Azt, hogy +, vagy – végtelent kapunk-e a számlálóban és a nevezőben is a legnagyobb kitevőjű tagok eljele határozza meg. Ez a számlálóban az n^3, a nevezben a $3n^2$, mivel mindkett pozitív szám, az eredmény $+\infty$ lesz.

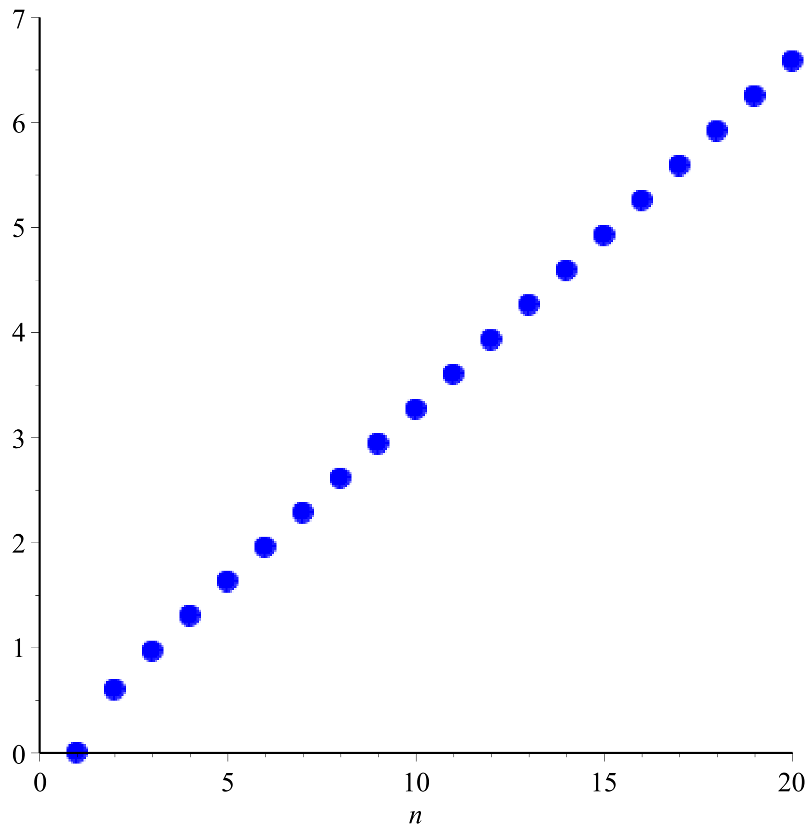
> $h := limit\left(\frac{n^3+2\cdot n-3}{3\cdot n^2+n+1}, n = infinity\right)$

$$h := \infty \tag{1.2.5}$$

> $l := \left[\left[n, \frac{n^3+2\cdot n-3}{3\cdot n^2+n+1}\right] \$ n = 1..20\right];$

$$l := \left[[1, 0], \left[2, \frac{3}{5}\right], \left[3, \frac{30}{31}\right], \left[4, \frac{69}{53}\right], \left[5, \frac{44}{27}\right], \left[6, \frac{45}{23}\right], \left[7, \frac{354}{155}\right], \left[8, \frac{175}{67}\right], \left[9, \frac{744}{253}\right], \left[10, \frac{1017}{311}\right], \left[11, \frac{18}{5}\right], \left[12, \frac{1749}{445}\right], \left[13, \frac{2220}{521}\right], \left[14, \frac{923}{201}\right], \left[15, \frac{3402}{691}\right], \left[16, \frac{825}{157}\right], \left[17, \frac{1648}{295}\right], \left[18, \frac{5865}{991}\right], \left[19, \frac{6894}{1103}\right], \left[20, \frac{2679}{407}\right]\right] \tag{1.2.6}$$

> $plot([l], n = 0..20, style = [point], color = [blue], symbol = solidcircle, symbolsize = 20, thickness = [4], view = [0..20, 0..7])$



4. feladat

Számítsuk ki a következ határértéket, a számláló fokszáma most legyen kisebb a nevez fokszámánál:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8\,n+3}{5\,n^2-2\,n+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{8}{n}+\frac{3}{n^2}}{5-\frac{2}{n}+\frac{7}{n^2}} = \frac{0}{5} = 0$$

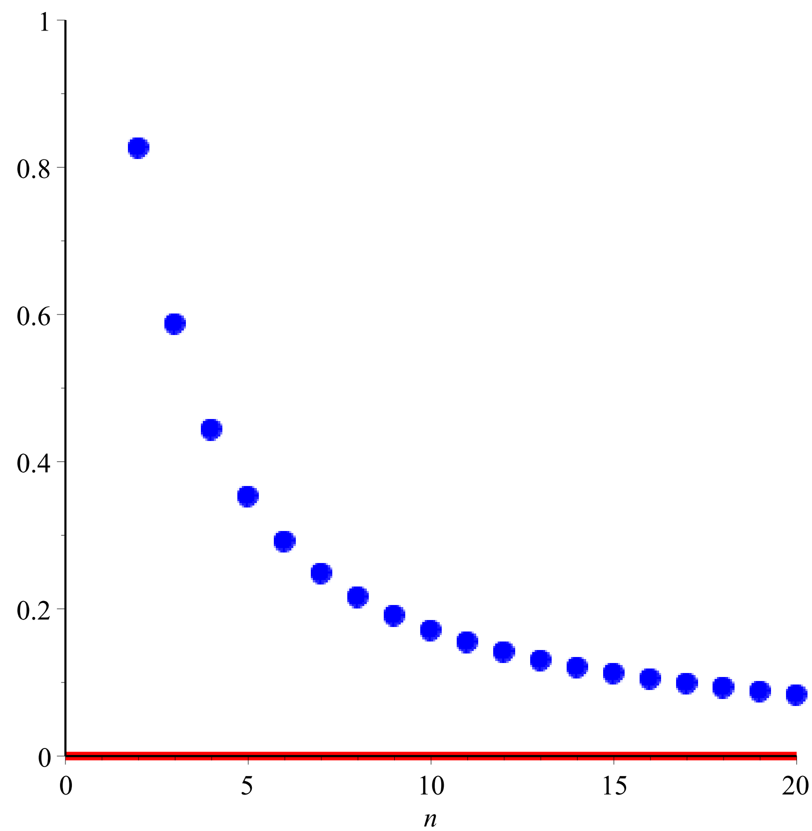
> $h := limit\left(\frac{8\cdot n+3}{5\cdot n^2-2\cdot n+7}, n = infinity\right)$

$$h := 0 \tag{1.2.7}$$

> $l := \left[\left[\mathrm{n}, \frac{8\cdot n+3}{5\cdot n^2-2\cdot n+7}\right] \$ n = 1 ..20\right];$

$$l := \left[\left[1, \frac{11}{10}\right], \left[2, \frac{19}{23}\right], \left[3, \frac{27}{46}\right], \left[4, \frac{35}{79}\right], \left[5, \frac{43}{122}\right], \left[6, \frac{51}{175}\right], \left[7, \frac{59}{238}\right], \left[8, \frac{67}{311}\right], \left[9, \frac{75}{394}\right], \left[10, \frac{83}{487}\right], \left[11, \frac{91}{590}\right], \left[12, \frac{99}{703}\right], \left[13, \frac{107}{826}\right], \left[14, \frac{115}{959}\right], \left[15, \frac{123}{1102}\right], \left[16, \frac{131}{1255}\right], \left[17, \frac{139}{1418}\right], \left[18, \frac{147}{1591}\right], \left[19, \frac{155}{1774}\right], \left[20, \frac{163}{1967}\right]\right] \tag{1.2.8}$$

> $plot([l, h], n = 0 ..20, style = [point, line], color = [blue, red], symbol = solidcircle, symbolsize = 20, thickness = [4, 4], view = [0 ..20, 0 ..1])$



Összefoglalás:

Két polinom hányadosa általában:

$$\frac{a_l x^l + a_{l-1}x^{l-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_k x^k + b_{k-1}x^{k-1} + \ldots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

Ha **l = k, vagyis a számláló és a nevező fokszáma megegyezik**, akkor a **határérték** $\frac{a_l}{b_k}$, nevezetesen a két főegyüttható (a legnagyobb kitevőjű hatvány szám szorzója) hányadosa.
Ha **l > k, vagyis a számláló fokszáma nagyobb a nevező fokszámánál**, akkor a **határérték** ∞, az előjelet a_l és b_k előjelei határozzák meg, ha azonosak az előjelek (mindkettő pozitív, vagy mindkettő negatív), a határérték $+\infty$, ha a két főegyüttható előjele különböző, akkor a határérték $-\infty$.
Ha **l < k, vagyis a számláló fokszáma kisebb a nevező fokszámánál**, akkor a **határérték 0**.

5. feladat

Mit tegyünk, ha gyök is szerepel a feladatban?
Először azt az esetet vizsgáljuk, amikor csak a nevezben, vagy csak a számlálóban van gyök. n > 1 kikötést azért kell megtennünk, hogy a nevezben ne legyen a gyök alatt negatív szám.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\,n}{\sqrt{n^2-2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4\,n^2}}{\sqrt{n^2-2}} = \sqrt{\frac{4}{1}} = 2$$

$2\,n = \sqrt{(2\,n)^2} = \sqrt{4\,n^2}$, mert 2n > 0

Magyarázat: A számlálóban lev kifejezést bevisszük a gyök alá. Gyök alá úgy viszünk be egy (nem negatív) kifejezést, hogy négyzetre emeljük. (Általában, ha n. gyök alá visszük be, akkor n. hatványra emeljük.)

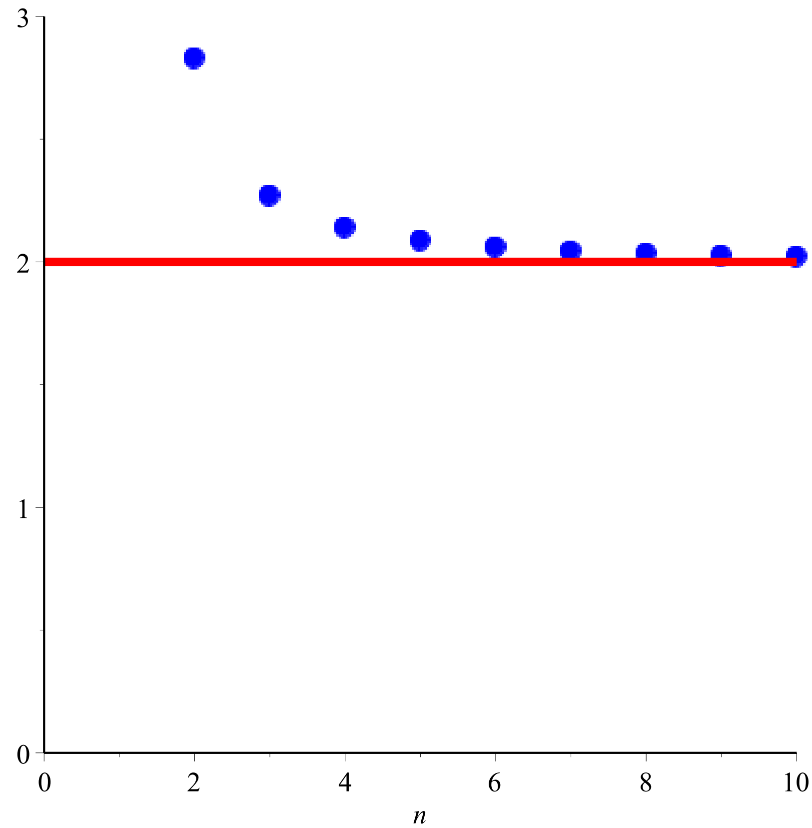
$> h := limit\left(\frac{2\cdot n}{\sqrt{n^2-2}}, n = infinity\right)$

$$h := 2 \tag{1.2.9}$$

$> l := \left[\left[n, \frac{2\cdot n}{\sqrt{n^2-2}}\right] \$ n = 2..10\right];$

$$l := \left[\left[2, 2\sqrt{2}\right], \left[3, \frac{6}{7}\sqrt{7}\right], \left[4, \frac{4}{7}\sqrt{14}\right], \left[5, \frac{10}{23}\sqrt{23}\right], \left[6, \frac{6}{17}\sqrt{34}\right], \left[7, \frac{14}{47}\sqrt{47}\right], \left[8, \frac{8}{31}\sqrt{62}\right], \left[9, \frac{18}{79}\sqrt{79}\right], \left[10, \frac{10}{49}\sqrt{98}\right]\right] \tag{1.2.10}$$

$> plot([l, h], n = 0..10, style = [point, line], color = [blue, red], symbol = solidcircle, symbolsize = 20, thickness = [4, 4], view = [0..10, 0..3])$



6. feladat

Ha a számláló és a nevez is azonos kitevj gyök alatt van. Ekkor közös gyök alá visszük és a gyök alatt a két polinom hányadosára vonatkozó szabály szerint járunk el.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[3]{5\,n^2 - 2\,n}}{\sqrt[3]{4\,n^2 + 3\,n}} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[3]{\frac{5\,n^2 - 2\,n}{4\,n^2 + 3\,n}} = \sqrt[3]{\frac{5}{4}}$$

Felhasznált azonosság:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$> h := limit\left(\frac{\sqrt[3]{5 \cdot n^2 - 2 \cdot n}}{\sqrt[3]{4 \cdot n^2 + 3 \cdot n}}, n = infinity\right)$$

$$h := \frac{1}{4}\, 5^{1/3}\, 4^{2/3} \tag{1.2.11}$$

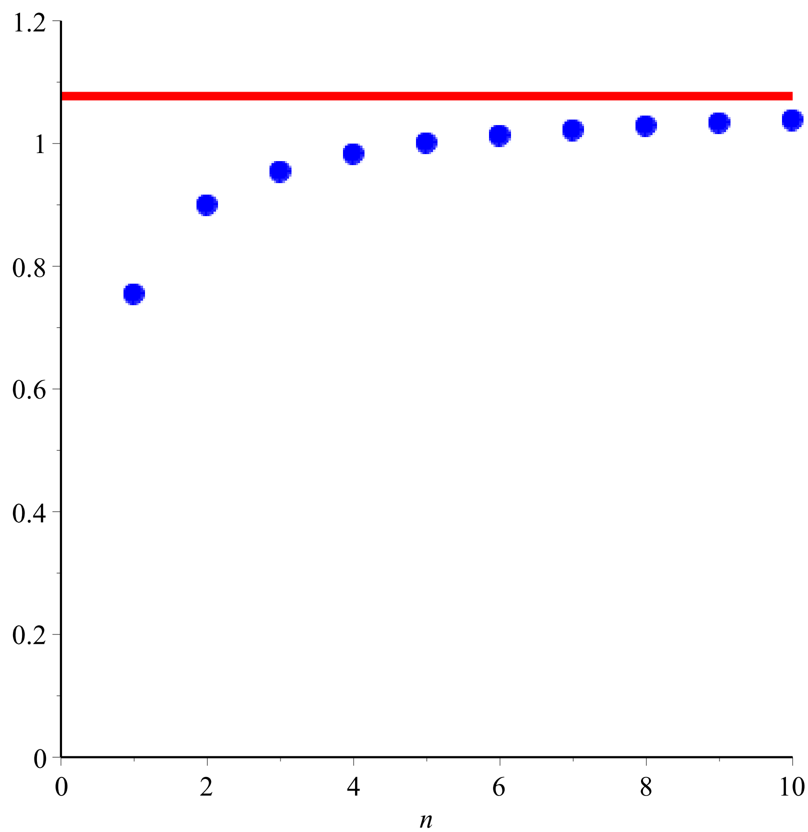
> $evalf(h, 5)$

$$1.0772 \qquad (1.2.12)$$

> $l := \left[\left[\mathrm{n}, \frac{\sqrt[3]{5 \cdot n^2 - 2 \cdot n}}{\sqrt[3]{4 \cdot n^2 + 3 \cdot n}}\right] \$ n = 1..10\right];$

$$l := \left[\left[1, \frac{1}{7}\, 3^{1/3}\, 7^{2/3}\right], \left[2, \frac{1}{22}\, 16^{1/3}\, 22^{2/3}\right], \left[3, \frac{1}{45}\, 39^{1/3}\, 45^{2/3}\right], \left[4, \frac{1}{76}\, 72^{1/3}\, 76^{2/3}\right], [5, 1], \left[6, \frac{1}{162}\, 168^{1/3}\, 162^{2/3}\right], \left[7, \frac{1}{217}\, 231^{1/3}\, 217^{2/3}\right], \left[8, \frac{1}{280}\, 304^{1/3}\, 280^{2/3}\right], \left[9, \frac{1}{351}\, 387^{1/3}\, 351^{2/3}\right], \left[10, \frac{1}{430}\, 480^{1/3}\, 430^{2/3}\right]\right] \qquad (1.2.13)$$

> $plot([l, h], n = 0..10, style = [point, line], color = [blue, red], symbol = solidcircle, symbolsize = 20, thickness = [4, 4], view = [0..10, 0..1.2])$



7. feladat

Ha a számláló és a nevez gyökének fokszáma különböz,
Azért, hogy a feladat nevezje ne legyen 0 az n > 1 kikötést kell tennünk.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+5\,n}}{\sqrt[3]{n^2-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\sqrt[3]{(n^3+5\,n)^3}}}{\sqrt[3]{\sqrt{(n^2-n)^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[6]{n^9+15\,n^7+75\,n^5+125\,n^3}}{\sqrt[6]{n^4-2\,n^3+n^2}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[6]{\frac{n^9+15\,n^7+75\,n^5+125\,n^3}{n^4-2\,n^3+n^2}}=+\infty$$

A felhasznált azonosságok:

$$a=\sqrt[n]{a^n}\quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}\quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\quad (a+b)^3=a^3+3\,a^2b+3\,ab^2+b^3$$

$$(a+b)^2=a^2+2\,ab+b^2$$

Azt is mondhatjuk, hogy a számláló fokszáma (a legnagyobb kitevj hatványának fokszáma) 3/2, harmadik hatvány a második gyök alatt, a nevez fokszáma (a legnagyobb kitevj hatványának fokszáma) 2/3 , második hatvány a harmadik gyök alatt. Mivel a számláló fokszáma nagyobb, mint a nevezőé, a határérték ∞

.

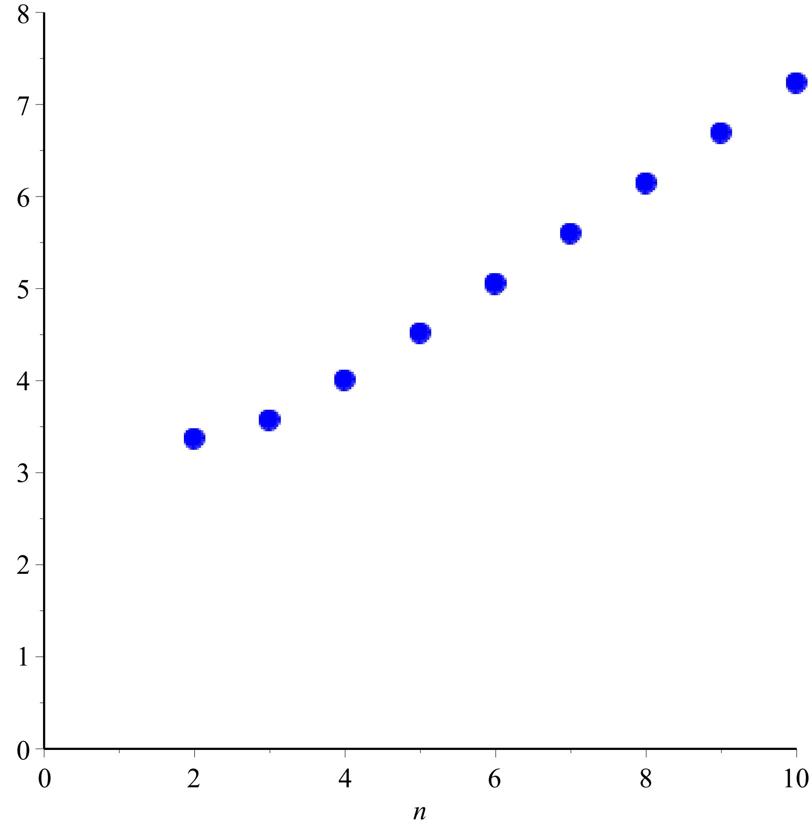
> $h := limit\left(\frac{\sqrt{n^3+5\cdot n}}{\sqrt[3]{n^2-n}}, n=infinity\right)$

$$h := \infty \qquad \textbf{(1.2.14)}$$

> $l := \left[\left[\mathrm{n}, \frac{\sqrt{n^3+5\cdot n}}{\sqrt[3]{n^2-n}}\right]\$n=2..10\right];$

$$l := \left[\left[2, \frac{1}{2}\sqrt{18}\,2^{2/3}\right], \left[3, \frac{1}{6}\sqrt{42}\,6^{2/3}\right], \left[4, \frac{1}{12}\sqrt{84}\,12^{2/3}\right], \left[5, \frac{1}{20}\sqrt{150}\,20^{2/3}\right], \left[6, \frac{1}{30}\sqrt{246}\,30^{2/3}\right], \left[7, \frac{1}{42}\sqrt{378}\,42^{2/3}\right], \left[8, \frac{1}{56}\sqrt{552}\,56^{2/3}\right], \left[9, \frac{1}{72}\sqrt{774}\,72^{2/3}\right], \left[10, \frac{1}{90}\sqrt{1050}\,90^{2/3}\right]\right] \qquad \textbf{(1.2.15)}$$

> $plot([l], n=0..10, style=[point], color=[blue], symbol=solidcircle, symbolsize=20, thickness=[4], view=[0..10, 0..8])$



A $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, |q|<1 határérték felhasználásával megoldható feladatok

A feladatok megoldása során gyakran felhasználjuk a középiskolában tanult hatványozás azonosságokat.

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

2. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, $a \neq 0$

3. $\left(a^n\right)^k = a^{n \cdot k}$

4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$

1. feladat

Számítsuk ki a következ határértéket:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3^{n+2} + 1}{3^n}$$

Ebben a feladatban egy olyan törtet vizsgálunk, amelynek a nevezje egytagú (nincs a tört nevezjében összeadás, kivonás)

Az azonosságokat ebben a leckében kicsit szokatlan módon „visszafelé" alkalmazzuk. Mindenki eltt ismert, hogy két azonos nevezj törtet így adunk össze:

$$\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3+2}{7} = \frac{5}{7}, \text{ vagy betkkel: } \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

„Fordítva" alkalmazva ez azt jelenti, hogy ha egy tört számlálójában összeg van, akkor két azonos nevezj tört összegévé bontható.

$$\frac{a+c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b}, \text{ feladatunkban: } \frac{3^{n+2}+1}{3^n} = \frac{3^{n+2}}{3^n} + \frac{1}{3^n}$$

Most nézzük az összeg két tagját külön, hogyan alakíthatók tovább. Az els tag számlálójában az 1. hatványozás azonosságot alkalmazzuk, ezt is „fordítva" jobbról balra olvassuk most: Összeget látunk a kitevben és azt azonos alapú hatványok szorzatává alakítjuk.

$$a^{n+m} = a^n \cdot a^m \quad 3^{n+2} = 3^n \cdot 3^2$$

$$\frac{3^{n+2}}{3^n} = \frac{3^n \cdot 3^2}{3^n}$$

Ezután 3^n -nel egyszersítünk és megkapjuk az összeg els tagját, ami 9.
A második tag átalakítása: Tudjuk, hogy 1 minden hatványa 1, vagyis $1^n = 1$ bármely n-re.
Így

$$\frac{1}{3^n} = \frac{1^n}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Az utóbbi egyenlőség a hatványozás 5. azonosságát használta fel (jobbról balra –„visszafelé”)
Foglaljuk össze az átalakításokat és számoljuk ki a határértéket:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+2}+1}{3^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+2}}{3^n} + \frac{1}{3^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^n \cdot 3^2}{3^n} + \frac{1^n}{3^n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(9 + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 9$$

A határérték kiszámításánál azt használtuk fel, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0,$$

mert az alap abszolút értéke kisebb egynél, azaz számokkal és jelekkel:

$$\left|\frac{1}{3}\right| < 1$$

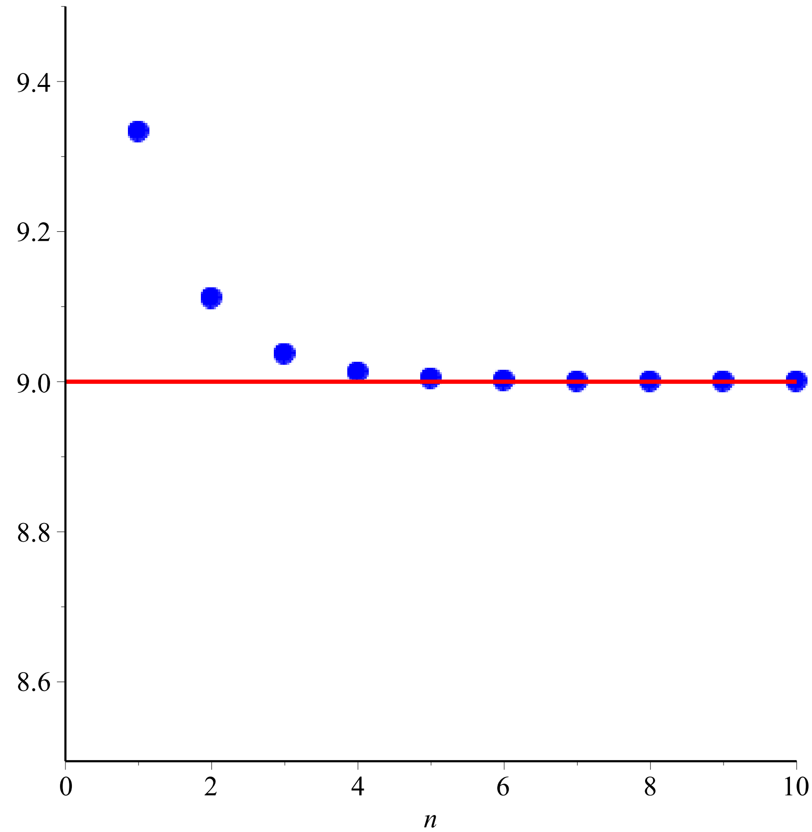
> $h := limit\left(\frac{3^{n+2}+1}{3^n}, n = infinity\right)$

$$h := 9 \qquad \textbf{(1.3.1)}$$

> $l := \left[\left[\mathrm{n}, \frac{3^{n+2}+1}{3^n}\right] \$ n = 1 .. 10\right];$

$$l := \left[\left[1, \frac{28}{3}\right], \left[2, \frac{82}{9}\right], \left[3, \frac{244}{27}\right], \left[4, \frac{730}{81}\right], \left[5, \frac{2188}{243}\right], \left[6, \frac{6562}{729}\right], \left[7, \frac{19684}{2187}\right], \left[8, \frac{59050}{6561}\right], \left[9, \frac{177148}{19683}\right], \left[10, \frac{531442}{59049}\right]\right] \qquad \textbf{(1.3.2)}$$

> $plot([l, h], n = 0 .. 10, style = [point, line], color = [blue, red], symbol = solidcircle, symbolsize = 20, thickness = [4, 2], view = [0 .. 10, 8.5 .. 9.5])$



Az ábrán nyomon követhet a "villámgyors" konvergencia.

2. feladat

Most egy olyan határértéket számítsunk ki, ahol a nevez többtagú és a hatványalapok is különbözk:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 2^{n-1}+4\cdot 3^{n+2}}{3^n-5\cdot 2^{n+1}}$$

Elször alkalmazzuk az 1. és 2. hatványozás azonosságot:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 2^{n-1}+4\cdot 3^{n+2}}{3^n-5\cdot 2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\frac{2^n}{2}+4\cdot 3^n\cdot 3^2}{3^n-5\cdot 2^n\cdot 2}$$

$$\boxed{a^n\cdot a^m=a^{n+m}}$$

$$\boxed{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$$

Próbáljuk a tagokat külön alakítani. A számláló 1. tagja

$$3\cdot\frac{2^n}{2} = \frac{3}{2}\cdot 2^n$$

Mit használtunk itt fel? Az egész számok törtekkel való szorzásának szabályát.

Általánosan ezt így is írhatjuk:

$$a\cdot\frac{b}{c} = \frac{a\cdot b}{c} = \frac{a}{c}\cdot b$$

a számlálót az egész számmal megszorozzuk, a nevez változatlan marad.

A számláló 2. tagja:

$$4\cdot 3^n\cdot 3^2 = 4\cdot 3^2\cdot 3^n = 4\cdot 9\cdot 3^n = 36\cdot 3$$

Mit használtunk fel? A szorzás tényezi tetszés szerint felcserélhetk. Idegen szóval a szorzás kommutatív:

$$a\cdot b = b\cdot a,$$

természetesen nemcsak két, hanem több tényezre is igaz, hogy a tényezk tetszés szerinti sorrendbe írhatók. Mi a feladatban 3 tényezre alkalmaztuk a kommutativitást.

Hasonlóan alakítható a nevez 2. tagja is.

$$5\cdot 2^n\cdot 2 = 5\cdot 2\cdot 2^n = 10\cdot 2^n$$

(Gyakori hiba, hogy az eredmény 20^n. Ez miért nem jó? Az n. hatvány csak a 2 alapra vonatkozik a 10-re nem.

$$10\cdot 2^n \neq 20^n \quad 10^n\cdot 2^n = (10\cdot 2)^n = 20^n$$

Hol tartunk most a fenti átalakítások után?

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 2^{n-1} + 4\cdot 3^{n+2}}{3^n - 5\cdot 2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\frac{2^n}{2} + 4\cdot 3^n\cdot 3^2}{3^n - 5\cdot 2^n\cdot 2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{2}\cdot 2^n + 36\cdot 3^n}{3^n - 10\cdot 2^n}$$

A hatványalapok közül (2, 3) válasszuk ki a nagyobb abszolút értékt, ez (3) és annak n. hatványával (3^n) osszuk el tagonként a számlálót és a nevezt is:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{2^n}{3^n}+36\cdot\frac{3^n}{3^n}}{\frac{3^n}{3^n}-10\cdot\frac{2^n}{3^n}}$$

Az 5. hatványozás azonosság és a lehetséges egyszersítések után a következ adódik:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n+36}{1-10\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{36}{1}=36$$

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}}$$

A határérték kiszámításánál azt használtuk fel, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0,$$

mert az alap

$$\left|\frac{2}{3}\right|<1$$

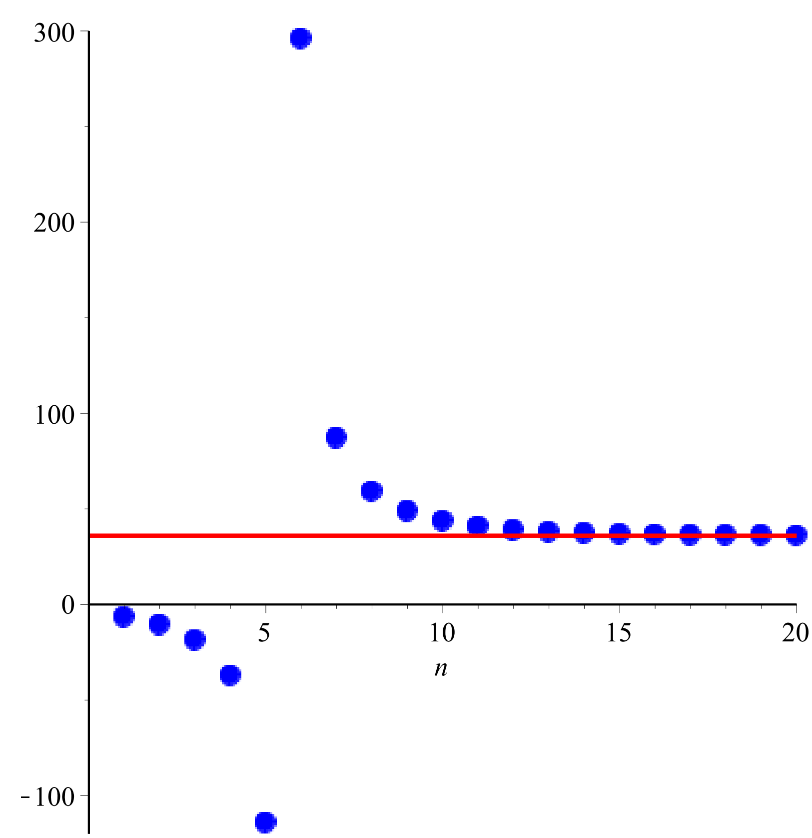
$> h := limit\left(\frac{3\cdot 2^{n-1}+4\cdot 3^{n+2}}{3^n-5\cdot 2^{n+1}}, n=infinity\right)$

$$h := 36 \tag{1.3.3}$$

$> l := \left[\left[n, \frac{3\cdot 2^{n-1}+4\cdot 3^{n+2}}{3^n-5\cdot 2^{n+1}}\right] \$ n=1..20\right];$

$$l := \left[\left[1, -\frac{111}{17}\right], \left[2, -\frac{330}{31}\right], \left[3, -\frac{984}{53}\right], \left[4, -\frac{2940}{79}\right], \left[5, -\frac{8796}{77}\right], \left[6, \frac{26340}{89}\right], \left[7, \frac{78924}{907}\right], \left[8, \frac{236580}{4001}\right], \left[9, \frac{709356}{14563}\right], \left[10, \frac{2127300}{48809}\right], \left[11, \frac{6380364}{156667}\right], \left[12, \frac{19138020}{490481}\right], \left[13, \frac{57407916}{1512403}\right], \left[14, \frac{172211460}{4619129}\right], \left[15, \frac{516609804}{14021227}\right], \left[16, \frac{1549780260}{42391361}\right], \left[17, \frac{4649242476}{127829443}\right], \left[18, \frac{13947530820}{384799049}\right], \left[19, \frac{173619084}{4800907}\right], \left[20, \frac{125525811300}{3476298641}\right]\right] \tag{1.3.4}$$

$> plot([l, h], n=0..20, style=[point, line], color=[blue, red], symbol=solidcircle, symbolsize=20, thickness=[4, 2], view=[0..20, -120..300])$



Szép példát látunk egy nem monoton sorozatra.

3. feladat

Számítsuk ki a következ határértéket, az újdonság ebben a feladatban az elzekhez képest, hogy az egyik kitevben szorzat van.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2^{2n} - 3 \cdot 3^{n+1}}{2^{n-1} - 5 \cdot 4^n + 7}$$

Ez a számláló 1. tagja a 2^{2n}. Hogyan alakítjuk át?

$$2^{2n} = 2^{2 \cdot n} = \left(2^2\right)^n = 4^n$$

Az átalakításhoz a 3. hatványozás azonosságot használtuk fel.

$$\left(a^n\right)^k = a^{n \cdot k}$$

1. megjegyzés: ha a kitevben a 2 és az n között nincs mveleti jel, ez mindig szorzást jelent,

$2\,n = 2 \cdot n$

2. megjegyzés:

$2^{2\,n} = \left(2^n\right)^2$

és

$2^{2\,n} = \left(2^2\right)^{\mathrm{n}}$

is helyes átalakítás, de most a 2. számunkra a célravezet.

A további átalakítások az 1. és 2. hatványozás azonosság szerint az elz feladatoknál ismertetett módon végezhetk el.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2^{2\,n} - 3 \cdot 3^{n+1}}{2^{n-1} - 5 \cdot 4^n + 7} = \lim_{n \to \infty} \frac{4^n - 3 \cdot 3^n \cdot 3^1}{\frac{2^n}{2^1} - 5 \cdot 4^n + 7} = \lim_{n \to \infty} \frac{4^n - 9 \cdot 3^n}{\frac{1}{2} \cdot 2^n - 5 \cdot 4^n + 7}$$

Kiválasztjuk a legnagyobb abszolút érték hatványalapot, ez most 4, 4^{n} -nel osztjuk el a számláló és a nevez minden tagját. A nevez harmadik tagját így alakítjuk át:

$$\frac{7}{4^n} = 7 \cdot \frac{1}{4^n} = 7 \cdot \frac{1^n}{4^n} = 7 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Az osztások, az 5. hatványozás azonosság és a fenti átalakítás alkalmazása után kapjuk:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 - 9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{4}\right)^n - 5 + 7 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5} = -0,2$$

A határérték kiszámításánál azt használtuk fel, hogy

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \quad \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2}{4}\right)^n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \quad \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$$

mert mindhárom alap abszolút értéke egynél kisebb szám.

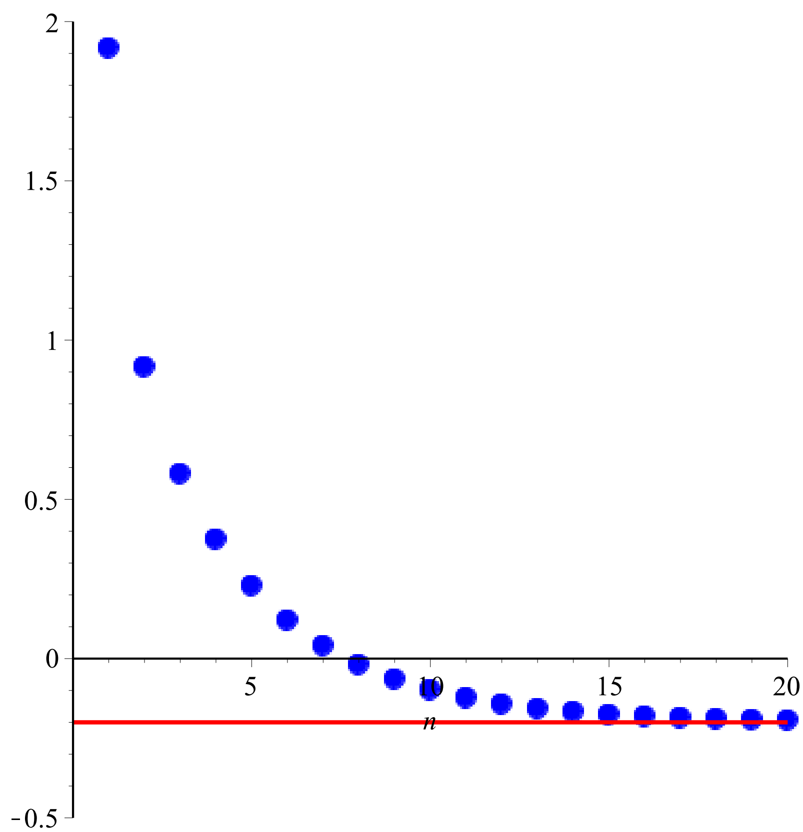
$$> \; h := limit\left(\frac{2^{2\,n} - 3 \cdot 3^{n+1}}{2^{n-1} - 5 \cdot 4^n + 7},\, n = infinity\right)$$

$$h := -\frac{1}{5} \tag{1.3.5}$$

> $l := \left[\left[\mathrm{n}, \frac{2^{2n} - 3 \cdot 3^{n+1}}{2^{n-1} - 5 \cdot 4^{n} + 7}\right] \$ n = 1..20\right];$

$$l := \left[\left[1, \frac{23}{12}\right], \left[2, \frac{65}{71}\right], \left[3, \frac{179}{309}\right], \left[4, \frac{43}{115}\right], \left[5, \frac{1163}{5097}\right], \left[6, \frac{2465}{20441}\right], \left[7, \frac{3299}{81849}\right], \left[8, -\frac{6487}{327545}\right], \left[9, -\frac{84997}{1310457}\right], \left[10, -\frac{517135}{5242361}\right], \left[11, -\frac{2599981}{20970489}\right], \left[12, -\frac{11994247}{83884025}\right], \left[13, -\frac{52759957}{335540217}\right], \left[14, -\frac{20489885}{122015371}\right], \left[15, -\frac{944601661}{5368692729}\right], \left[16, -\frac{3907546807}{21474803705}\right], \left[17, -\frac{16017607717}{85899280377}\right], \left[18, -\frac{65232692335}{343597252601}\right], \left[19, -\frac{264417553741}{1374389272569}\right], \left[20, -\frac{1068130568167}{5497557614585}\right]\right] \tag{1.3.6}$$

> $plot([l, h], n = 0..20, style = [point, line], color = [blue, red], symbol = solidcircle, symbolsize = 20, thickness = [4, 2], view = [0..20, -0.5..2])$



4. feladat

Eddig nem használtuk még a 4. hatványozás azonosságot és nem vizsgáltunk negatív alapot sem. Nézzünk most egy olyan feladatot, ami ezeket is tartalmazza.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-3)^n + 3\cdot 2^n \cdot 5^n}{10^n - 5\cdot 7^n}$$

$$\boxed{(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$$

A számláló 2. tagjában alkalmazzuk a 4. hatványozás azonosságot:

$$2^n \cdot 5^n = (2\cdot 5)^n = 10^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-3)^n + 3\cdot 2^n \cdot 5^n}{10^n - 5\cdot 7^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-3)^n + 3\cdot 10^n}{10^n - 5\cdot 7^n}$$

A legnagyobb abszolút érték hatványalap most a 10, ezzel osztjuk a tört számlálóját és nevezjét, természetesen most is felhasználjuk az 5. hatványozás azonosságot.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(-\frac{3}{10}\right)^n + 3}{1 - 5\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^n} = \frac{3}{1} = 3$$

A határérték kiszámításánál azt használtuk fel, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{3}{10}\right)^n = 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{7}{10}\right)^n = 0,$$

mert mindkét alap abszolút értéke egynél kisebb szám.

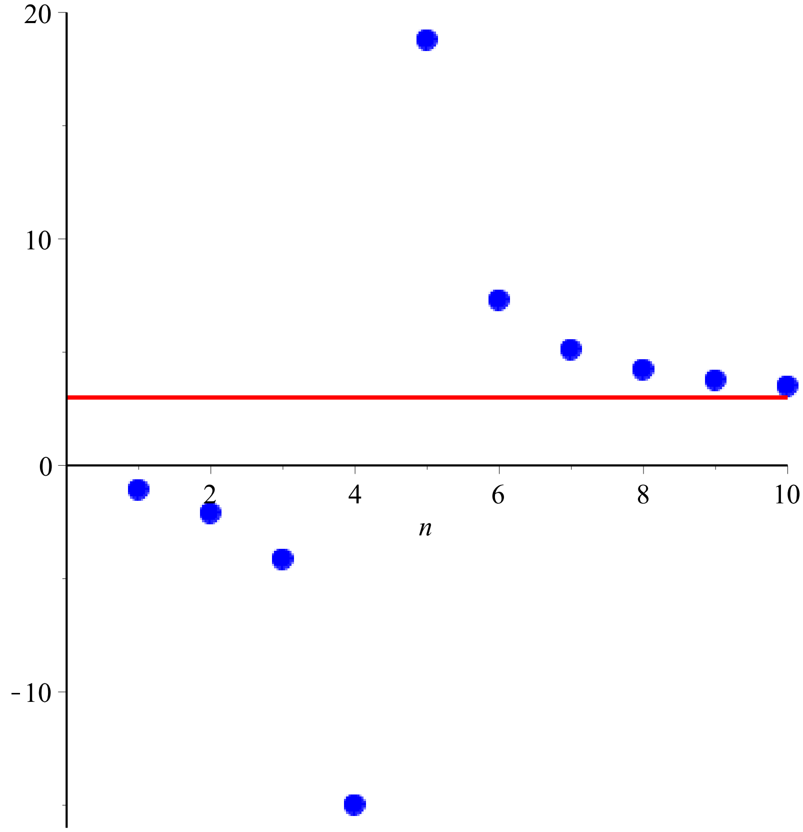
$> h := limit\left(\frac{(-3)^n + 3\cdot 2^n \cdot 5^n}{10^n - 5\cdot 7^n}, n = infinity\right)$

$$h := 3 \qquad \textbf{(1.3.7)}$$

$> l := \left[\left[n, \frac{(-3)^n + 3\cdot 2^n \cdot 5^n}{10^n - 5\cdot 7^n}\right] \$ n = 1..10\right];$

$$l := \left[\left[1, -\frac{27}{25}\right], \left[2, -\frac{309}{145}\right], \left[3, -\frac{2973}{715}\right], \left[4, -\frac{30081}{2005}\right], \left[5, \frac{299757}{15965}\right], \left[6, \frac{3000729}{411755}\right], \left[7, \frac{29997813}{5882285}\right], \left[8, \frac{15789819}{3746105}\right], \left[9, \frac{2999980317}{798231965}\right], \left[10, \frac{30000059049}{8587623755}\right]\right] \qquad \textbf{(1.3.8)}$$

$> plot([l, h], n = 0..10, style = [point, line], color = [blue, red], symbol = solidcircle, symbolsize = 20, thickness = [4, 2], view = [0..10, -16..20])$



5. feladat

Változtassuk meg a feladatot úgy, hogy a legnagyobb abszolút érték alap csak a nevezben szerepeljen, a számlálóba 10 helyett írjunk egy kisebb számot, például 5-öt.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^n+3\cdot 2^n\cdot 5^n}{5^n-5\cdot 7^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^n+3\cdot 10^n}{5^n-5\cdot 7^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{3}{10}\right)^n+3}{\left(\frac{5}{10}\right)^n-5\cdot\left(\frac{7}{10}\right)^n}=\text{"}\frac{3}{0}\text{"}=-\infty$$

A határérték számításnál azt kaptuk, hogy a tört számlálója 3-hoz, nevezje 0-hoz tart. Ezt a matematikailag „csúnya” felírást idézőjelbe tettem a 0-val való osztás miatt, de a határérték számítás elméletéből tudjuk, hogy ez nem ún. „kritikus határérték”, hanem tudjuk, hogy a sorozat a ∞-be tart. Hogyan tudjuk eldönteni, hogy +, vagy – végtelen lesz-e a határérték? A számlálóban és a nevezben is el kell dönteni, hogy melyik tag a legnagyobb. Ez a számlálóban és a nevezben is a 2. tag. Ezek egyikének eljele pozitív, (számlálóban a 3), a másiké negatív (a nevező 2. tagja), így hányadosuk negatív lesz, ezért a határérték -∞.

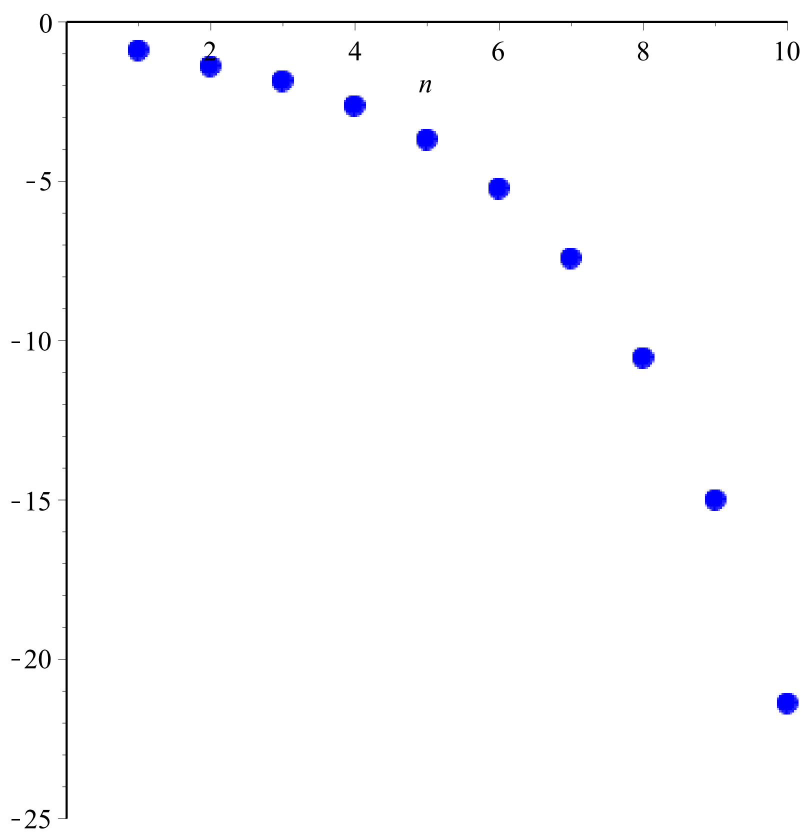
> $h := limit\left(\dfrac{(-3)^n + 3\cdot 2^n\cdot 5^n}{5^n - 5\cdot 7^n}, n = infinity\right)$

$$h := -\infty \tag{1.3.9}$$

> $l := \left[\left[n, \dfrac{(-3)^n + 3\cdot 2^n\cdot 5^n}{5^n - 5\cdot 7^n}\right] \$ n = 1..10\right];$

$$l := \left[\left[1, -\frac{9}{10}\right], \left[2, -\frac{309}{220}\right], \left[3, -\frac{991}{530}\right], \left[4, -\frac{30081}{11380}\right], \left[5, -\frac{99919}{26970}\right], \left[6, -\frac{3000729}{572620}\right], \left[7, -\frac{9999271}{1346530}\right], \left[8, -\frac{300006561}{28433380}\right], \left[9, -\frac{999993439}{66604970}\right], \left[10, -\frac{30000059049}{1402610620}\right]\right] \tag{1.3.10}$$

> $plot([l], n = 0..10, style = [point], color = [blue], symbol = solidcircle, symbolsize = 20, thickness = [4], view = [0..10, -25..0])$



Ha a 20. tagot kiszámoljuk az már -752,132, a sorozat gyorsan "vágtat" a -∞ felé.

Néhány "∞-∞" típusú kritikus határérték kiszámítása

1. feladat

Számítsuk ki a következ határértéket:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1}\right)$$

Ha $n\to\infty$, akkor $n+3\to\infty$ és $\sqrt{n+3}\to\infty$, hasonlóan $\sqrt{\mathrm{n}-1}\to\infty$, tehát valóban a felírt kifejezés határértéke "∞ - ∞" típusú kritikus határérték.
Ha egy kifejezést 1-gyel szorzunk, az értéke nem változik.
Minden olyan tört értéke 1, amelynek a számlálója és nevezje megegyezik
Emlékezzünk az

$$(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$$

azonosságra is.

Szorozzuk meg a kifejezést 1-gyel, amit

$$\frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}}$$

formában írunk fel.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}}$$

Törtet egész számmal úgy szorzunk, hogy az egész számot a tört számlálójával összeszorozzuk, a nevezt változatlanul leírjuk, ugyanígy járunk el tetszleges egész és törtkifejezésekkel is.

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1}\right)\cdot\left(\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+3}\right)^2-\left(\sqrt{n-1}\right)^2}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}}=$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\mathrm{n}+3)-(\mathrm{n}-1)}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}}$$

Felhasználtuk az átalakítás során a

$$(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$$

azonosságot, a

$$(\sqrt{a})^2=a$$

összefüggést, ami minden

$a \geq 0$ esetére igaz.

A következ lépésnél vigyázzunk a zárójelfelbontásra különösen, ha a zárójel eltt negatív eljel áll!
A folytatás:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{n}+3-\mathrm{n}+1}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n-1}} = 0$$

Miért lett 0 a határérték? A számláló 4, a nevező határértéke $+\infty$, a „nem kritikus határértékek között felsoroltuk, hogy a "$\frac{c}{\pm\infty}$" típusú határértékek mindig 0-t adnak, ahol c tetszleges valós szám.

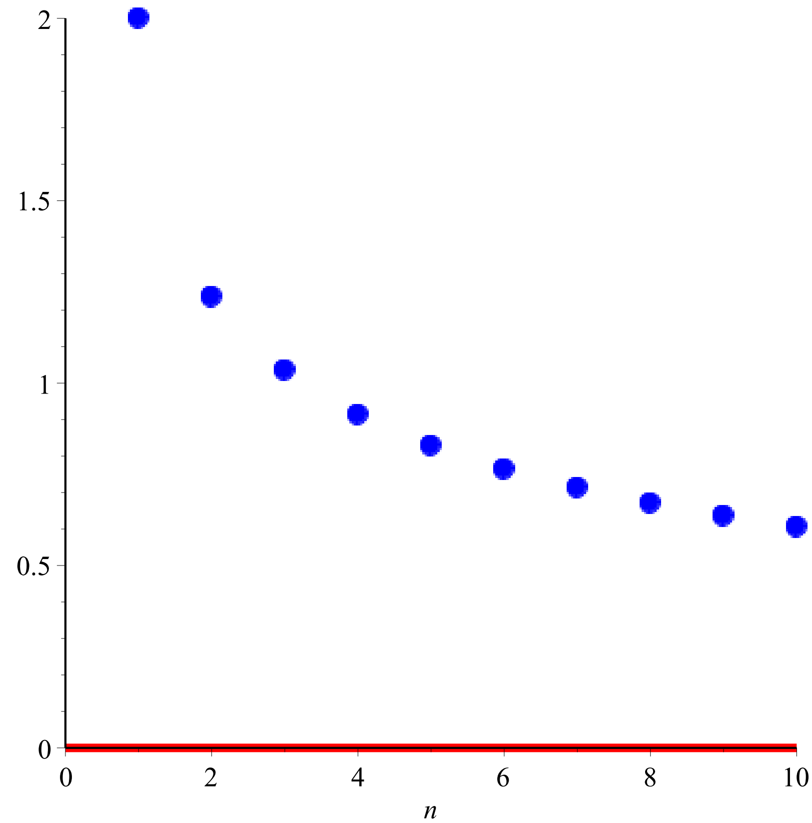
> $h := limit\left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n-1}, n = infinity\right)$

$$h := 0 \tag{1.4.1}$$

> $l := [[\mathrm{n}, \sqrt{n+3} - \sqrt{n-1}]\ \$n = 1..10];$

$$l := [[1, \sqrt{4}], [2, \sqrt{5}-1], [3, \sqrt{6}-\sqrt{2}], [4, \sqrt{7}-\sqrt{3}], [5, \sqrt{8}-\sqrt{4}], [6, \sqrt{9}-\sqrt{5}], [7, \sqrt{10}-\sqrt{6}], [8, \sqrt{11}-\sqrt{7}], [9, \sqrt{12}-\sqrt{8}], [10, \sqrt{13}-\sqrt{9}]] \tag{1.4.2}$$

> $plot([l, h], n = 0..10, style = [point, line], color = [blue, red], symbol = solidcircle, symbolsize = 20, thickness = [4, 4], view = [0..10, 0..2])$



Lassan konvergál a sorozat a 0-hoz, még 20. tagnál is legalább 0,4 az eltérés a határértéktl.

2. feladat

Nem mindig lesz a számlálóban állandó szám az átalakítás után. Nézzünk erre is egy példát:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-\mathrm{n}}}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-\mathrm{n}}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+n}\right)^2-\left(\sqrt{n^2-\mathrm{n}}\right)^2}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-\mathrm{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)-(n^2-n)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-\mathrm{n}}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-n^2+n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-\mathrm{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\,n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-\mathrm{n}}}$$

Eddig a szokásos átalakításokat végeztük el. A határértéket "∞-∞" típusú kritikus határértékből "$\frac{\infty}{\infty}$" típusú, szintén kritikus határértékké alakítottuk.

Most osszuk el a számlálót és a nevezt is n -tel. A gyök alá n-et négyzetre emelve n^2 formában vigyük be.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\,n}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-\mathrm{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=1$$

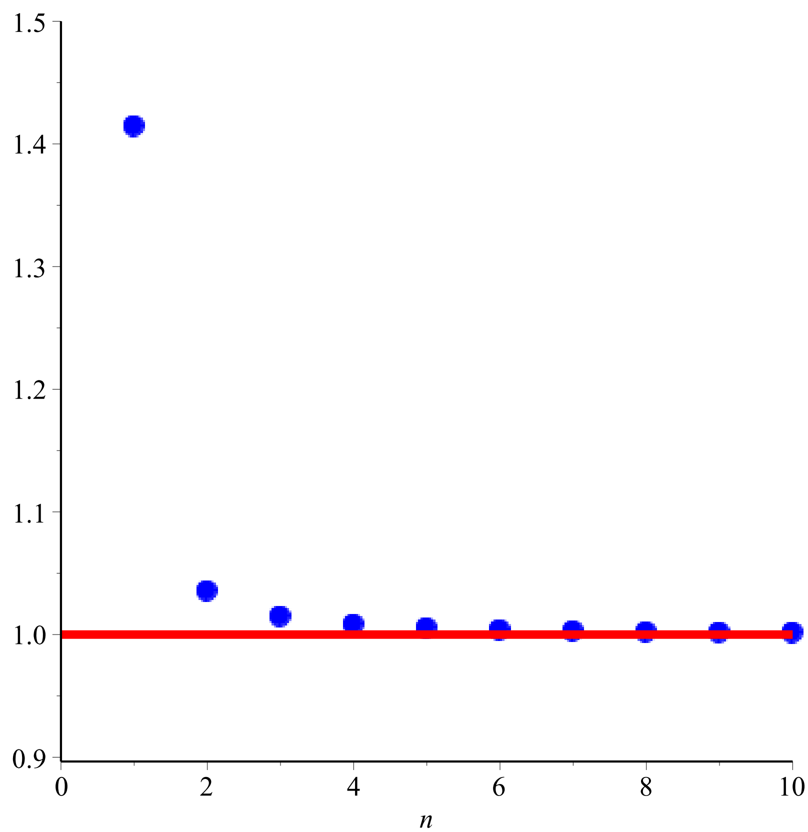
> $h := limit\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n},\, n=infinity\right)$

$$h := 1 \tag{1.4.3}$$

> $l := \left[\left[\mathrm{n}, \sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}\right] \$ n=1..10\right];$

$$l := [[1, \sqrt{2}], [2, \sqrt{6}-\sqrt{2}], [3, \sqrt{12}-\sqrt{6}], [4, \sqrt{20}-\sqrt{12}], [5, \sqrt{30}-\sqrt{20}], [6, \sqrt{42}-\sqrt{30}], [7, \sqrt{56}-\sqrt{42}], [8, \sqrt{72}-\sqrt{56}], [9, \sqrt{90}-\sqrt{72}], [10, \sqrt{110}-\sqrt{90}]] \tag{1.4.4}$$

> $plot([l, h], n=0..10, style=[point, line], color=[blue, red], symbol=solidcircle, symbolsize=20, thickness=[4, 4], view=[0..10, 0.9..1.5])$



Nagyon gyorsan konvergál a sorozat 1-hez, már a 3. tagnál az ábrán szinte alig látható az 1-tl való eltérés.

3. feladat

Nézzünk még egy az elzhöz hasonló példát:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{5\,n^2-1}\;-2\,n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{5\,n^2-1}\;-2\,n\right)\cdot\frac{\sqrt{5\,n^2-1}\;+2\,n}{\sqrt{5\,n^2-1}\;+2\,n}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{5\,n^2-1}\right)^2-(2\,n)^2}{\sqrt{5\,n^2-1}\;+2\,n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5\,n^2-1-4\,n^2}{\sqrt{5\,n^2-1}\;+2\,n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{\sqrt{5\,n^2-1}\;+2\,n}$$

Eddig a szokásos átalakításokat végeztük el. A határértéket "∞-∞" típusú kritikus határértékből "$\frac{\infty}{\infty}$" típusú, szintén kritikus határértékké alakítottuk.

Most osszuk el a számlálót és a nevezt is n^2 -tel. A gyök alá n^2-et négyzetre emelve $(n^2)^2 = n^4$ formában vigyük be.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{\sqrt{5\,n^2-1}\;+2\,n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^2}}{\sqrt{\frac{5}{n^2}-\frac{1}{n^4}}+\frac{2}{n}}=\text{"}\frac{1}{0}\text{"}=+\infty$$

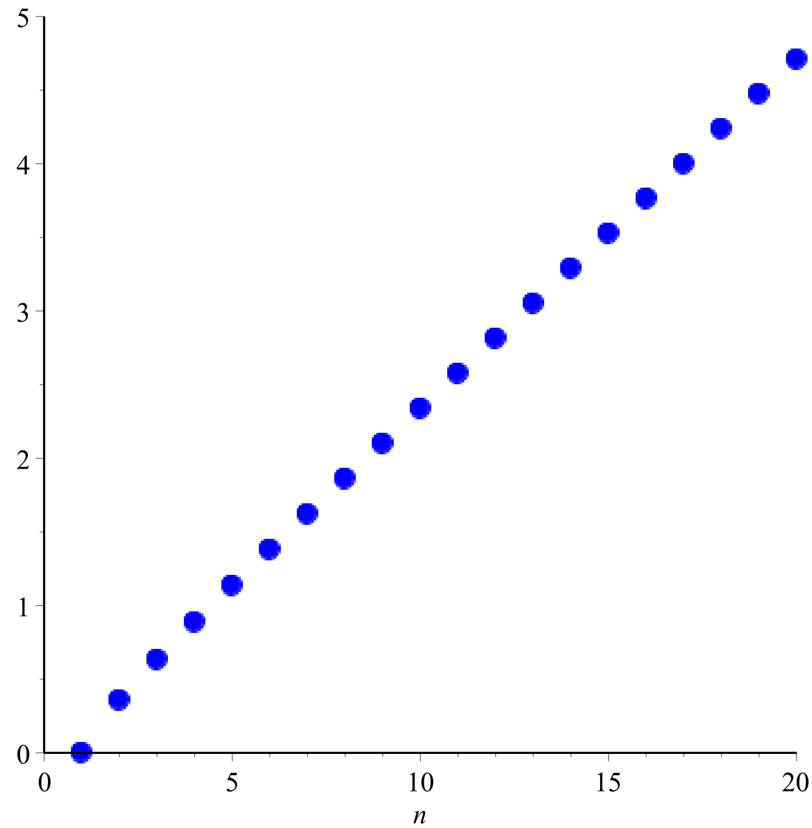
A számláló 1-hez a nevez 0-hoz tart, az idézjelbe tett osztásnak a számok körében nincs értelme, de mint határérték létezik és nem is kritikus, értéke ∞, mégpedig +∞, mert a nevező pozitív, ahogy a számláló nagyobbik tagja is az.

> $h := limit\left(\sqrt{5\cdot n^2-1}\;-2\cdot n,\, n=infinity\right)$

$$h := \infty \qquad \textbf{(1.4.5)}$$

> $l := \left[\left[\mathrm{n}, \sqrt{5\cdot n^2-1}\;-2\cdot n\right] \$ n = 1\,..20\right]:$

> $plot(\,[\,l\,], n=0\,..20, style=[\,point\,], color=[\,blue\,], symbol=solidcircle, symbolsize=20,$
> $thickness=[\,4\,], view=[\,0\,..20, 0\,..5\,]\,)$



A következ nevezetes határértéken alapuló sorozatok:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$$

1. feladat

Számítsuk ki a következ határértéket:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{3}{2\,n}\right)^n$$

Először a zárójelben lev kifejezést

$$1+\frac{k}{n}$$

alakra kell hoznunk.

Az átalakításhoz a következket használjuk fel:

- $a+(-b)=a-b$, vagy számokkal: $10+(-3)=10-3$, ha egy kifejezéshez (vagy számhoz) egy negatív kifejezést (vagy számot) hozzáadunk, az ugyanazt eredményezi, mintha a hozzáadott értéket kivontuk volna.

- Törtet egész számmal úgy osztunk, hogy ha lehetséges elosztjuk a számlálót az egész számmal, ha nem a nevezt szorozzuk meg vele. Ugyanígy végezzük el az említett mveletet algebrai kifejezésekre is. Algebrai kifejezéseknél általában a 2. módszer alkalmazható, ezért a számpélda és a „betűs” példa is arra vonatkozik.

$$\frac{\frac{3}{2}}{5}=\frac{3}{2\cdot 5}=\frac{3}{10}, \qquad \frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{b\cdot c}=\frac{a}{bc}$$

Hogyan lehet eldönteni a felírásból, hogy törtet osztunk egész számmal, vagy egész számot törttel? Az egyenlségjel helye mutatja meg. A kétféle felírást tilos összekeverni, mert egész más eredményre vezet.
Nézzünk mindkettre ugyanazokkal a számokkal 1-1 példát és hasonlítsuk össze az eredményt:

Egész számot törttel osztunk:

$$\frac{3}{\frac{2}{5}}=3:\frac{2}{5}=3\cdot\frac{5}{2}=\frac{3\cdot 5}{2}=\frac{15}{2}=7,5$$

Törtet osztunk egész számmal:

$$\frac{\frac{3}{2}}{5}=\frac{3}{2\cdot 5}=\frac{3}{10}=0,3$$

A fentieket alkalmazva adódik, hogy

$$1-\frac{\frac{3}{2}}{n}=1+\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)}{n}$$

Az átalakításból látható, hogy

$k=-\frac{3}{2}$, és így

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{2\,n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)}{n}\right)^n=e^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{e^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{e^3}}\approx 0,22313$$

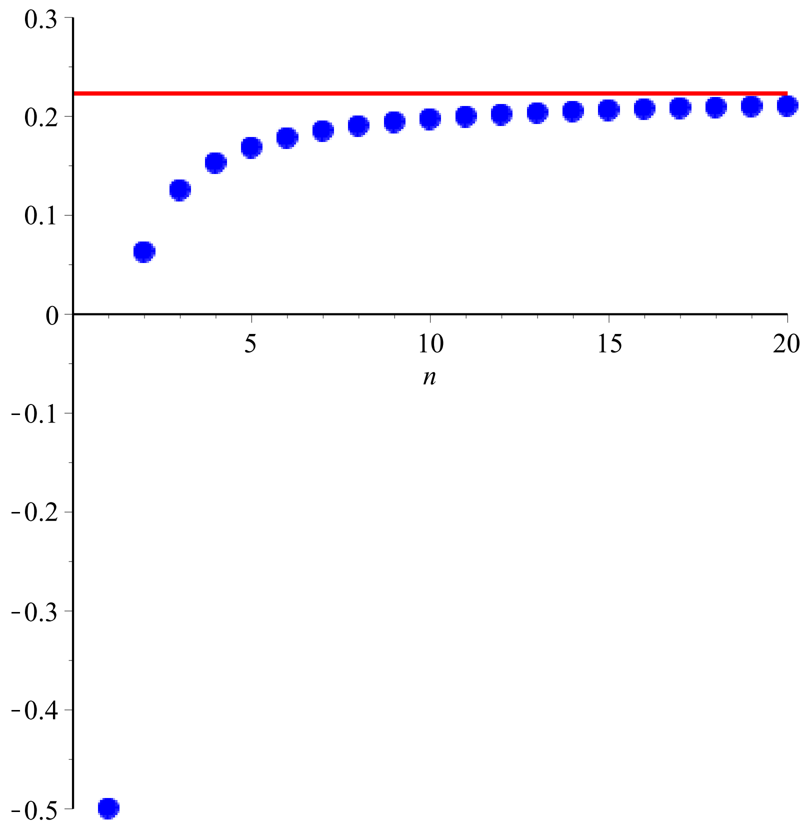
(Az utóbbi két átalakítás már nem tartozik szorosan a feladat megoldásához, csak „cifrázat”, hogy hányféleképpen is írható fel egy negatív törtkitevj hatvány.)

> $h := limit\left(\left(1-\frac{3}{2\cdot n}\right)^n, n = infinity\right)$

$$h := \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}} \tag{1.5.1}$$

> $l := \left[\left[\mathrm{n}, \left(1-\frac{3}{2\cdot n}\right)^n\right] \$ n = 1..20\right]:$

> $plot([l, h], n = 0..20, style = [point, line], color = [blue, red], symbol = solidcircle, symbolsize = 20, thickness = [4, 2], view = [0..20, -0.5..0.3])$



2. feladat

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n-1}\right)^{n+2} \quad n>1$$

Az alap átalakításánál kétféle gondolatmenet szerint is eljárhatunk.

1.Hasonlóan, mint a 2 polinom hányadosának határérték számításánál, vagyis a számlálót és a nevezt is osszuk el n-nel.

$$\frac{n+5}{n-1}=\frac{1+\frac{5}{n}}{1-\frac{1}{n}}$$

2.A számlálóban és a nevezben is emeljünk ki n-et, majd egyszersítsünk vele.

$$\frac{n+5}{n-1}=\frac{n\cdot\left(1+\frac{5}{n}\right)}{n\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)}=\frac{1+\frac{5}{n}}{1-\frac{1}{n}}$$

A kiemelés helyességéről mindig úgy tudunk megbizonyosodni, hogy „visszaszorozzuk”.
Ez például a tört számlálója esetén így néz ki:

$$n\cdot\left(1+\frac{5}{n}\right)=n\cdot 1+n\cdot\frac{5}{n}=n+5$$

Az eredmény nyilván mindkét esetben ugyanaz lesz, különben „nagy baj” lenne. A második eljárás vihet tovább a késbbi, bonyolultabb feladatokra.

A kitevben összeg van, ezért az 1. hatványozás azonosságot kell alkalmaznunk.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+5}{n-1}\right)^{n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{5}{n}}{1-\frac{1}{n}}\right)^{n}\cdot\left(\frac{1+\frac{5}{n}}{1-\frac{1}{n}}\right)^{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{5}{n}\right)^{n}}{\left(1+\frac{(-1)}{n}\right)^{n}}\cdot\frac{\left(1+\frac{5}{n}\right)^{2}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2}}$$

$$=\frac{e^{5}}{e^{-1}}\cdot\frac{1}{1}=\frac{e^{5}}{e^{-1}}=e^{6}\approx 403,4288$$

$$\boxed{a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m}}$$

Itt álljunk meg egy pillanatra. Nézzük meg a határértékeket külön-külön.
Az els tört számlálójának és nevezjének határértékei a nevezetes határértékek alapján:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n = e^5$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{(-1)}{n}\right)^n = e^{-1}$$

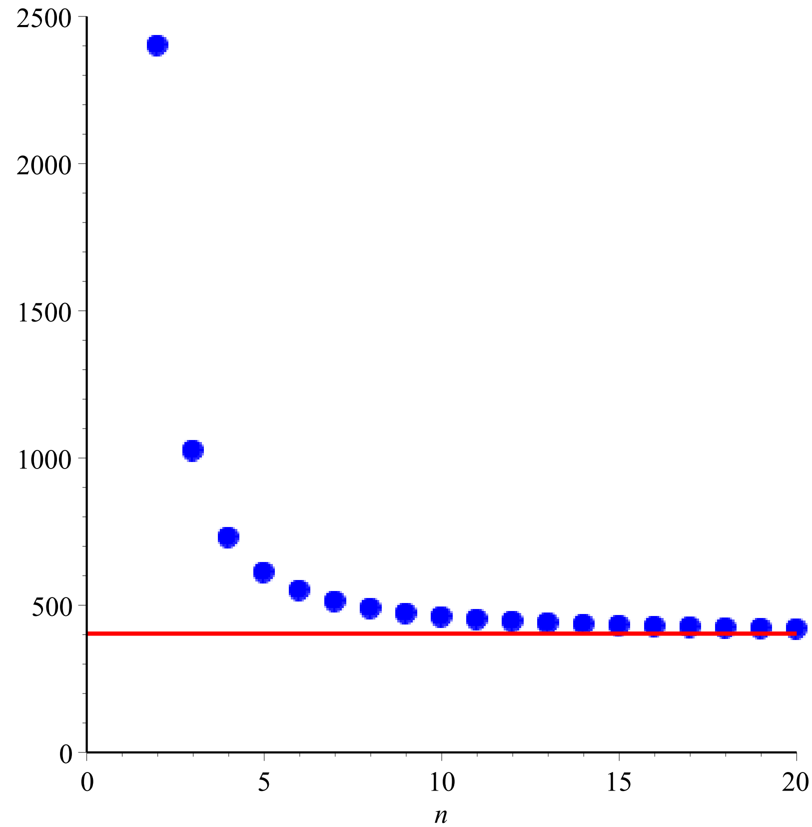
A második tört esetében nagyon vigyázzunk, gyakori hiba itt is e-t belekeverni a határérték számításba. Pedig ezek a határértékek teljesen mások. A kitev itt konkrét szám. Ekkor meg kell nézni, hogy hova tart az alap. Jelen esetben ez a számláló és nevez esetén is 1. És ezt kell a megfelel hatványra emelni, mivel $1^2 = 1$, ezért a számláló és nevez határértéke is egy. Tehát még egyszer; csak akkor lesz a határérték az e megfelelő hatványa, ha a kitevőben „n” (vagy n is) szerepel és nem (csak) konkrét szám.

> $h := limit\left(\left(\frac{n+5}{n-1}\right)^{n+2}, n = infinity\right)$

$$h := \mathrm{e}^6 \tag{1.5.2}$$

> $l := \left[\left[\mathrm{n}, \left(\frac{n+5}{n-1}\right)^{n+2}\right] \$ n = 2..20\right]:$

> $plot([l, h], n = 0..20, style = [point, line], color = [blue, red], symbol = solidcircle, symbolsize = 20, thickness = [4, 2], view = [0..20, 0..2500])$



3. feladat

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2\,n}{2\,n-2}\right)^{n-3} \qquad n > 1$$

A zárójelben lev tört számlálójából és nevezjébl is emeljünk ki 2n-et. A kitevt írjuk

$$n-3=n+(-3)$$

$$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$$

$$\boxed{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$$

alakba és alkalmazzuk rá az els hatványozás azonosságot. A kitevben lev különbségre alkalmazhattuk volna a 2. hatványozás azonosságot is, de akkor dupla emeletes törtet kellett volna írni, ami szintén jó, csak szokatlanabb.

2n kiemelése például a számlálóból:

$$1+2n=2n\cdot(?+?)$$

mit írjak az 1. kérdjel helyére, mivel kell megszorozni a 2n-et, hogy 1-et kapjak?

A reciprokával $\frac{1}{2n}$ -nel, tehát ez kerül az els kérdjel helyére. És mivel tudjuk helyettesíteni a második kérdjelet? Mivel kell megszoroznunk 2n-et, hogy 2n-et kapjunk? Természetesen a válasz 1. Tehát a kiemelés eredménye:

$$1+2n=2n\cdot\left(\frac{1}{2n}+1\right)$$

Hasonlóképpen járunk el a nevezben is.

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2n}{2n-2}\right)^{n-3}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n\left(\frac{1}{2n}+1\right)}{2n\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right)^{n+(-3)}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{2n}}{1-\frac{1}{n}}\right)^{n}\cdot\left(\frac{1+\frac{1}{2n}}{1-\frac{1}{n}}\right)^{-3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{\frac{1}{2}}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{(-1)}{n}\right)^n}\cdot\left(\frac{1+\frac{1}{2n}}{1-\frac{1}{n}}\right)^{-3}=\frac{e^{\frac{1}{2}}}{e^{-1}}\cdot 1=e^{\frac{3}{2}}=\sqrt{e^3}\approx 4,481689$$

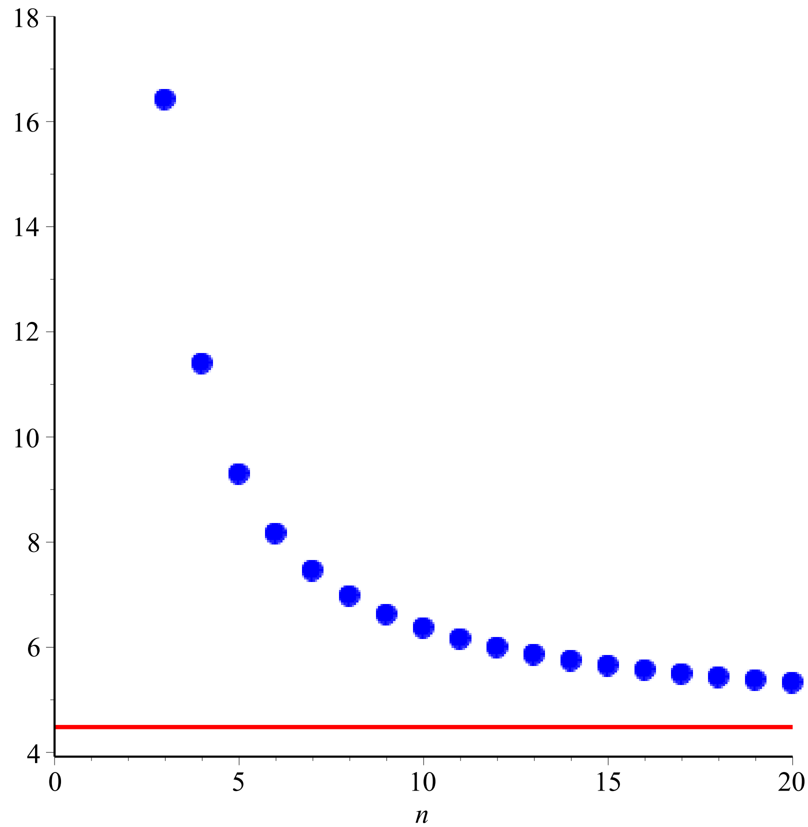
Végül a 4. hatványozás azonosság és az elz feladatból ismert átalakítások után adódik az eredmény. A konkrét szám (nem n) kitevj hatványokat nem szükséges a 4. hatványozás azonosság szerint felbontani, elég megnézni az alap határértékét (ez most 1) és a megfelel hatványra (-3) emelni, ami eredményül 1-et ad.

> $h := limit\left(\left(\frac{1+2\cdot n}{2\cdot n-2}\right)^{n+2}, n=infinity\right)$

$$h := \mathrm{e}^{\frac{3}{2}} \qquad \textbf{(1.5.3)}$$

> $l := \left[\left[n, \left(\frac{1+2\cdot n}{2\cdot n-2}\right)^{n+2}\right] \$ n=2..20\right]:$

> $plot([l, h], n=0..20, style=[point, line], color=[blue, red], symbol=solidcircle, symbolsize=20, thickness=[4, 2], view=[0..20, 4..18])$



4. feladat

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{5 + 2\,n}{7 + 3\,n} \right)^{2\,n}$$

A számlálóból 2n-et, a nevezbl 3n-et emelünk ki, hogy "1+ valamilyen kifejezés" legyen a számlálóban és a nevezben is. Ezután n-nel lehet egyszersíteni, de a $\frac{2}{3}$ szorzó ott marad.

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{5 + 2\,n}{7 + 3\,n} \right)^{2\,n} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2\,n \left(\frac{5}{2\,n} + 1 \right)}{3\,n \left(\frac{7}{3\,n} + 1 \right)} \right)^{2\,n} = \lim_{n \to \infty} \left(\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\left(1 + \frac{5}{2\,n} \right)}{\left(1 + \frac{7}{3\,n} \right)} \right)^{n} \right)^{2}$$

Az utolsó lépésben a 3. hatványozás azonosságot is alkalmaztuk a teljes kifejezésre. Ezután a 4. és 5. hatványozás azonosság alkalmazása következik és a már ismert emeletes törtté alakítás a bels zárójelben lev kifejezésekre. Így el is érjük, hogy kialakulnak a nevezetes határértékre jellemz „mintázatok”.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\cdot\left(\frac{\left(1+\frac{\frac{5}{2}}{n}\right)^{n}}{\left(1+\frac{\frac{7}{2}}{n}\right)^{n}}\right)^{2}\right)=\left(0\cdot\frac{e^{\frac{5}{2}}}{e^{\frac{7}{2}}}\right)^{2}=0$$

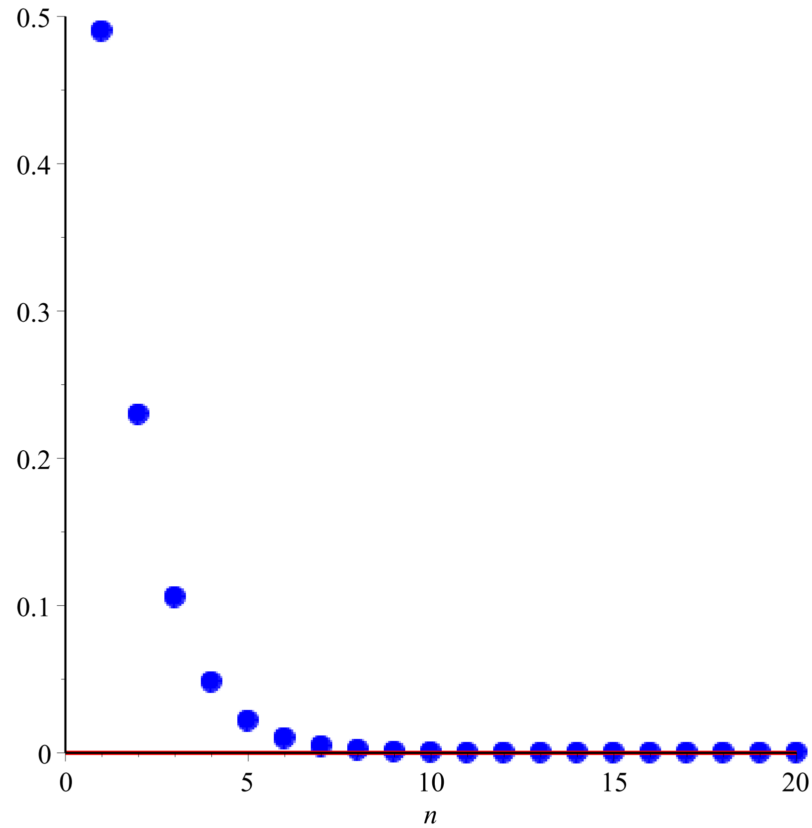
A $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{n}=e^{k}$ határértéken kívül felhasználtuk a $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}=0$, mert az alap $\left|\frac{2}{3}\right|<1$ nevezetes határértéket is.

> $h := limit\left(\left(\frac{5+2\cdot n}{7+3\cdot n}\right)^{2\cdot n}, n=infinity\right)$

$$h := 0 \tag{1.5.4}$$

> $l := \left[\left[n, \left(\frac{5+2\cdot n}{7+3\cdot n}\right)^{2\cdot n}\right] \$ n=1..20\right]:$

> $plot([l, h], n=0..20, style=[point, line], color=[blue, red], symbol=solidcircle, symbolsize=20, thickness=[4, 2], view=[0..20, 0..0.5])$



5. feladat

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1+4\,n}{5+3\,n} \right)^{\frac{n}{2}}$$

A számlálóból 4n-et, a nevezbl 3n-et emelünk ki. Az egyszersítés és a hatványozás azonosságok elvégzése után

$$\left(\frac{4}{3} \right)^{n}$$

adódik. A kitev átalakítása a törtkitevj hatvány definíciója alapján történik, itt az

$$a^{\frac{n}{2}} = \sqrt{a^n}$$

szerint. (Az „a” betű most a teljes zárójeles kifejezést helyettesíti.)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+4n}{5+3n}\right)^{\frac{n}{2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n\cdot\left(\frac{1}{4n}+1\right)}{3n\cdot\left(\frac{5}{3n}+1\right)}\right)^{\frac{n}{2}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^{n}\cdot\frac{\left(1+\frac{\frac{1}{4}}{n}\right)^{n}}{\left(1+\frac{\frac{5}{3}}{n}\right)^{n}}}=\sqrt{+\infty\cdot\frac{e^{\frac{1}{4}}}{e^{\frac{5}{3}}}}=+\infty$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+4\,n}{5+3\,n}\right)^{\frac{n}{2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4\,n\cdot\left(\frac{1}{4\,n}+1\right)}{3\,n\cdot\left(\frac{5}{3\,n}+1\right)}\right)^{\frac{n}{2}}=\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^{n}\cdot\frac{\left(1+\frac{\frac{1}{4}}{n}\right)^{n}}{\left(1+\frac{\frac{5}{3}}{n}\right)^{n}}}$$

$$=\sqrt{+\infty\cdot\frac{e^{\frac{1}{4}}}{e^{\frac{5}{3}}}}=+\infty$$

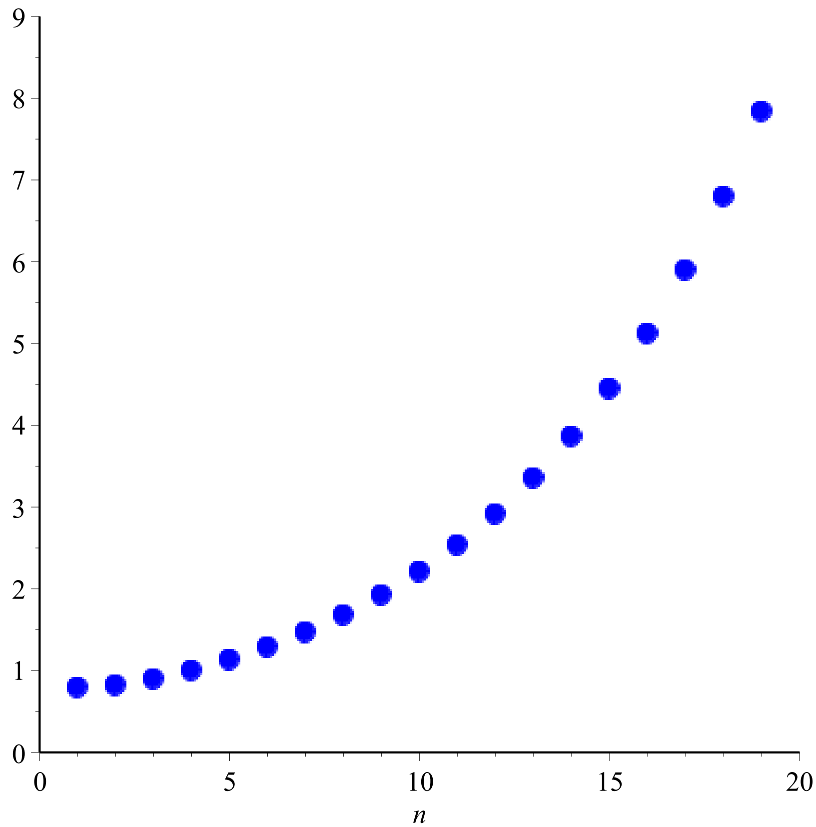
Az $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{n}=e^{k}$ határértéken kívül felhasználtuk a $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{n}=+\infty$ nevezetes határértéket is, a határérték azért $+\infty$, mert az alap $\frac{4}{3}>1$.

$> h := limit\left(\left(\frac{1+4\cdot n}{5+3\cdot n}\right)^{\frac{n}{2}}, n=infinity\right)$

$$h := \infty \qquad \textbf{(1.5.5)}$$

$> l := \left[\left[n, \left(\frac{1+4\cdot n}{5+3\cdot n}\right)^{\frac{n}{2}}\right]\$n=1..20\right]:$

$> plot([l], n=0..20, style=[point], color=[blue], symbol=solidcircle, symbolsize=20, thickness=[4], view=[0..20, 0..9])$



6. feladat

Utoljára nézzünk meg egy „renitens példányt”, egy oszcillálva divergens sorozatot. Az elzekben részletezett átalakításokat végezzük itt is el.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+3\,n}{5-3\,n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+3\,n}{5-3\,n}\right)^{n}\cdot\left(\frac{2+3\,n}{5-3\,n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3\,n\left(\frac{2}{3\,n}+1\right)}{-3\,n\left(-\frac{5}{3\,n}+1\right)}\right)^{n}$$

$$\cdot\left(\frac{2+3\,n}{5-3\,n}\right)=\lim_{n\to\infty}(-1)^{n}\cdot$$

$$\frac{\left(1+\frac{\frac{2}{3}}{n}\right)^{n}}{\left(1+\frac{-\frac{5}{3}}{n}\right)^{n}}\cdot\left(\frac{\frac{2}{n}+3}{\frac{5}{n}-3}\right)$$

Mivel a sorozat páros index és páratlan index tagjainak más a határértéke, ezért a sorozat divergens.

Ha n páros a határérték:

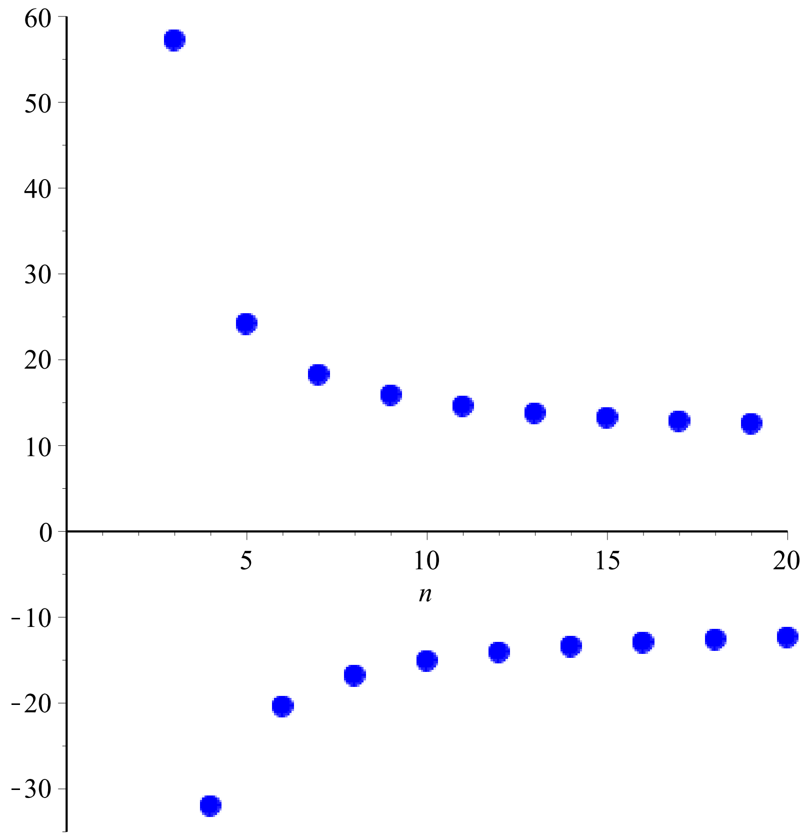
$$1 \cdot \frac{e^{\frac{2}{3}}}{e^{-\frac{5}{3}}} \cdot (-1) = -e^{\frac{7}{3}} \approx -10,31225$$

Ha n páratlan:

$$-1 \cdot \frac{e^{\frac{2}{3}}}{e^{-\frac{5}{3}}} \cdot (-1) = e^{\frac{7}{3}} \approx 10,31225$$

> $l := \left[\left[\mathrm{n}, \left(\frac{2+3\cdot n}{5-3\cdot n}\right)^{n+1}\right] \$ n = 3..20\right]:$

> $plot([l], n = 3..20, style = [point], color = [blue], symbol = solidcircle, symbolsize = 20, thickness = [4], view = [0..20, -35..60])$



A sorozatot azért csak a 3. tagtól kezdve ábrázoltam, mert a 2. tag értéke túl nagy volt, és ezért nem tudtam volna szemléltetni a további tagokkal az oszcillációt.

Feladatok önálló megoldásra

1. Vizsgálja meg monotonitás, korlátosság szempontjából a következ sorozatot! Konvergens-e? Ha igen, adja meg a határértékét! Adjon meg küszöbszámot, ha $\varepsilon = 10^{-2}$!

$$a_n = \frac{6-2n}{n-4}$$
$$a_n = \frac{4n-4}{5-2n}$$
$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{4n-14}{5+2n}$$

2. Konvergensek-e az alábbi sorozatok? Ha igen, adja meg a határértéküket!

$$b_n = 2n - \sqrt{4n^2 + 3n}$$
$$c_n = \frac{10^n - 2^{n+1} \cdot 5^n + 3^{2n}}{10^{n-1} + 7}$$
$$d_n = \left(\frac{n+2}{n-3}\right)^{2n}$$

$$b_n = 4n - \sqrt{16n^2 - 3n - 2}$$

$$c_n = \frac{6^{n-2} \cdot 2^{n+3} - 7 \cdot 5^n}{5 \cdot 12^{n-1} + 2e}$$
$$d_n = \left(\frac{2n+7}{3+2n}\right)^{3n+1}$$

$$b_n = \sqrt{25n^2 - 3n - 2} - 5n$$

$$c_n = 5^{-n} - \frac{6^{n+2} \cdot 2^{n-3} - 7 \cdot 5^n}{5 \cdot 12^{n+1}}$$

$$d_n = \left(\frac{n+8}{2+n}\right)^{\frac{n}{3}} + \sqrt[n]{n+3}$$

$$b_n = \sqrt{16n^2 + 2n + 2} - \sqrt{16n^2 - 3n - 2}$$

$$c_n = \frac{6^{n+1} \cdot 2^{n-2} - 7 \cdot 5^n}{5 \cdot 12^{n-1} + e}$$

$$d_n = \left(\frac{2n+7}{3+2n}\right)^{\frac{n}{3}}$$

$$b_n = \sqrt{16n^2 - 3n - 2} - 4n$$

$$c_n = \frac{4^{n+2} \cdot 3^{n-3} - 7 \cdot 5^n}{5 \cdot 12^{n-1} + 2e}$$

$$d_n = \left(\frac{5n-7}{3+5n}\right)^{\frac{n}{3}}$$

$$k_n = 2^{\frac{3\sqrt[n]{4} - 1}{\sqrt[n]{n^2 + 3n + 1}}}$$

3. Vizsgálja meg korlátosság szempontjából a következ sorozatokat!

$l_n = 3 - \frac{3}{5} n$ $\quad$ $m_n = (-2)^n$ $\quad$ $h_n = \frac{1 - 2n}{n + 2}$